रैखिक समीकरण

एक समीकरण में समता या समीका चिह्न सदैव होता है | समता (बराबर) का चिह्न यह दर्शाता है कि इस चिह्न के बाईं ओर के व्यंजक (बायाँ पक्ष LHS) का मान चिह्न के दाईं ओर के व्यंजक (दायाँ पक्ष RHS) के बराबर है |

उदाहरण : $4x + 5 = 65$;

एक चर में रैखिक समीकरण :- किसी समीकरण में यदि एक चर हो व उसकी घात एक हो तो वह समीकरण एक चर में रैखिक समीकरण कहलाती है |

उदाहरण : (i) $2x + 5 = 8$ (ii) $3x - 7 = 2x + 3$

(iii) $2x - 7 = 8 - x$

एक चर में रैखिक समीकरण का व्यापक स्वरूप $ax + b = 0, a \neq 0$ है , जहाँ a तथा b अचर हैं |

दो चरों में रैखिक समीकरण का व्यापक स्वरूप $ax + by + c = 0$, जहाँ a, b तथा c वास्तविक संख्याएँ है | और a तथा b में से कम से कम 1 शून्येतर है |

एक चर में रैखिक समीकरण का हल :- वह संख्या जिसे समीकरण में चर के स्थान पर रखने से LHS तथा RHS बराबर हो जाए, समीकरण का हल कहलाता है |

उदाहरण : $\frac{3y}{2} - 3 = 9$ को हल कीजिए |

$\frac{3y}{2} = 9 + 3$ (पक्षान्तरण करने पर)

$3y = 2 (9 + 3)$

$3y = 2 (12)$

$y = \frac{24}{3}$

$y = 8$

अत: समीकरण का हल $y = 8$ है |

$5(x - 3) = x + 5$ को हल कीजिए |

दो चरों में रैखिक समीकरणों का हल :-

हमें पता है कि दो चरों में रैखिक समीकरण का स्वरूप $ax + by + c = 0$ है |

क्योंकि समीकरण में दो चर होते है | अत: हल का अर्थ होता है, x तथा y के मानों का युग्म जो दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करता है |

उदाहरण : 2x + 3y = 12

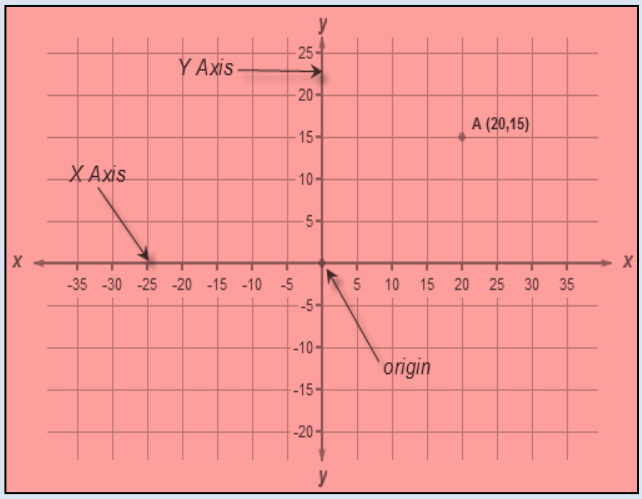
इस समीकरण में x = 3 व y = 2 रखने पर

2(3) + 3(2)

6 + 6 = 12 दायाँ पक्ष |

अत: x = 3 व y = 2 इस समीकरण का एक हल है | इस हल को एक क्रमिक युग्म (3, 2) के रूप में लिखा जाता है जिसमें पहले x का व उसके बाद y का मान लिखा जाता है | इसी प्रकार (0, 4) भी एक अन्य हल है | इस प्रकार दो चरों वाले रैखिक समीकरणों के विभिन्न हलों का कोई अंत नहीं है | **अत: दो चरों वाले रैखिक समीकरण के अपरिमित रूप से अनंत हल होते है |**

(Graph) ग्राफ का परिचय :- ग्राफ में दो लम्बवत संख्या रेखाएँ होती है जिन्हें हम x अक्ष व y अक्ष से दर्शाते हैं | दोनों रेखाएँ जहाँ पर प्रतिच्छेदित करती है वह मूल बिंदु(origin) कहते हैं | इस के निर्देशांक (0, 0) होते हैं | यह दो रेखाएँ तल को चार भागों में बाँटती है, प्रथम चतुर्थांश, द्वितीय चतुर्थांश, तृतीय चतुर्थांश, चतुर्थ चतुर्थांश कहते हैं |



ग्राफ में x अक्ष के निर्देशांक 20, y अक्ष के निर्देशांक 15 है | इस प्रकार बिंदु A के निर्देशांक (20, 15) है |

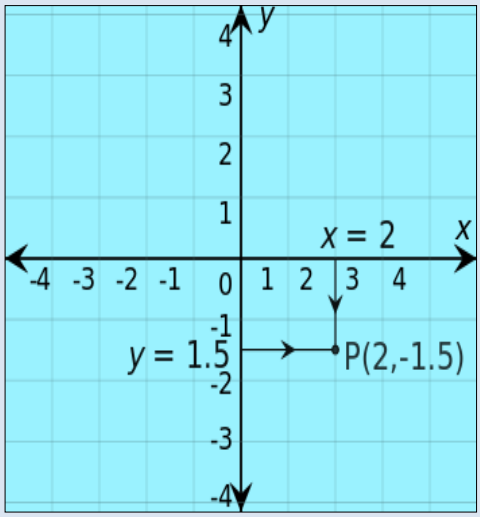
माना एक बिंदु P(2, -1.5) है जिसे ग्राफ में दर्शाना है | इस बिंदु का x निर्देशांक 2 है | व y निर्देशांक – 1.5 है |

निम्न बिंदुओं को ग्राफ में दर्शाइए |

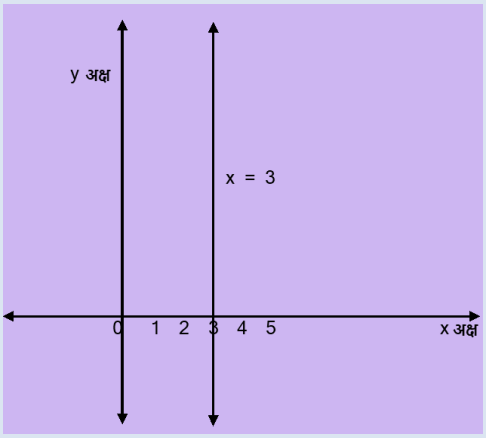
A (5, 3) B (-6, 5)

C (2, 0) D (3, -4)

E (0, -1) F (-1.5, -2)



वस्तुत: हर एक रैखिक समीकरण को रैखिक समीकरण इसलिए कहा जाता है क्योंकि इसका ज्यामितीय निरूपण एक सरल रेखा होती है |



x अक्ष पर प्रत्येक बिंदु का y निर्देशांक 0 होता है | इसकी समीकरण y = 0 होगी |

y अक्ष पर प्रत्येक बिंदु का x निर्देशांक 0 होता है | इसकी समीकरण x = 0 होगी |

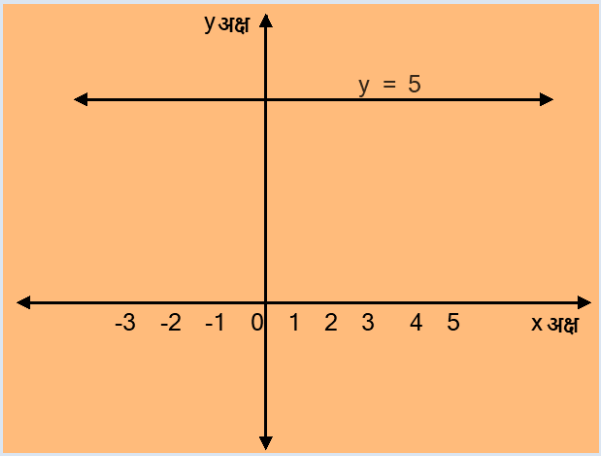
x = a का आलेख y –अक्ष के समांतर एक सरल रेखा होती है |

y = a का आलेख x –अक्ष के समांतर एक सरल रेखा होती है |

अत: एक चर वाले रैखिक समीकरण में

x = 3, y = 0 यदि हो तो y अक्ष के समक्ष

समान्तर रेखा होगी |



अत: एक चर वाले रैखिक समीकरण में

x = 0, y = 5 यदि हो तो x अक्ष के समक्ष

समान्तर रेखा होगी |

दो चरों में रैखिक समीकरण का निकाय (Simaltaneous Equation)

x + 3y = 6

2x – y = 5

ये दोंनों समीकरण दो चरों में रैखिक समीकरण का निकाय (Simaltaneous Equation) कहलाता है | तथा x तथा y के मान जो दोनों समीकरणों को एक साथ संतुष्ट करें वह समीकरणों के हल है |

ऐसे समीकरणों को हल करने की दो विधियाँ है |

(i) आलेखीय विधि
(ii) बीजीय विधि (a) प्रतिस्थापन विधि (b) विलोपन विधि (c) वज्र गुणन विधि |

आलेखीय विधि : इस विधि में पहले एक समीकरण में किसी एक चर के विभिन्न मान मानकर उनके संगत दूसरे चर के विभिन्न मान प्राप्त करते हैं | इस प्रकार प्राप्त क्रमिक युग्म के बिंदुओं को ग्राफ में निर्देशित करते हैं | इन बिंदुओं को मिलाने एक सरल रेखा प्राप्त होती है | पुन: इसी प्रकार दूसरी समीकरण की रेखा प्राप्त करते हैं | दोनों रेखाओं के आलेख निम्न तीन प्रकार के हो सकते हैं |

(i) प्रतिच्छेदी रेखाएँ : इसमें दोनों समीकरणों से प्राप्त रेखाएँ एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है | इस बिंदु के निर्देशांक दिए गए समीकरण निकाय का हल कहलाता है | इस स्थिति में समीकरणों का अद्वितीय हल होगा |

(ii) सम्पाती रेखाएँ : इसमें दोनों समीकरणों से प्राप्त रेखाएँ एक दूसरे के ऊपर प्राप्त होती है | वह रेखा पर स्थित प्रत्येक बिंदु के निर्देशांक दिए गए समीकरण निकाय का हल होता है | इस स्थिति में समीकरणों के अनंत हल होंगे |

(iii) समांतर रेखाएँ : इसमें दोनों समीकरणों से प्राप्त रेखाएँ समांतर होती है | इस स्थिति में समीकरणों का कोई हल नहीं होगा |

पाठ से संबंधित शब्दों की जानकारी :-

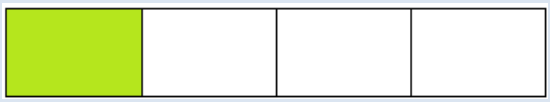
❖ **समीकरण** = जिसमे बराबर का चिहन हो तथा दाया पक्ष = बाया पक्ष होता है |

❖ **दुगना** = दो से गुणा, X 2

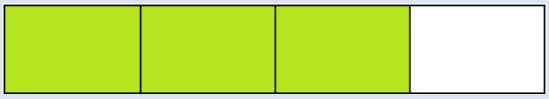
❖ **तिगुना** = तीन से गुणा, X 3

❖ **एक तिहाई** = एक बटे तीन, $\frac{1}{3}$

❖ **दो तिहाई** = दो बटे तीन, $\frac{2}{3}$

❖ **एक चौथाई** = एक बटे चार, $\frac{1}{4}$ 

❖ **दो चौथाई** = दो बटे चार, $\frac{2}{4}$

❖ **तीन चौथाई** = तीन बटे चार, $\frac{3}{4}$ 

❖ **बिंदु** = पेंसिल की नोक से बना चिहन ⇨ • बिंदु A

❖ **बिंदु के निर्देशांक** = (x,y) के रूप में दर्शाते है |

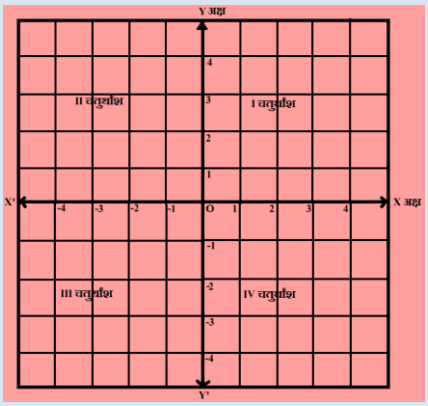
❖ **X अक्ष** = ग्राफ में क्षैतिज (आड़ी) रेखा को कहते हैं |

❖ **Y अक्ष** = ग्राफ में उर्ध्वाधर (खड़ी) रेखा को कहते हैं |

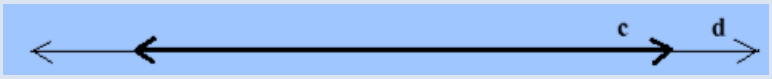
❖ **चतुर्थांश** = ग्राफ में X अक्ष तथा Y अक्ष द्वारा बाटे गए में से चौथा भाग

❖ **आलेखीय विधि =** ग्राफ द्वारा हल करना, ग्राफिय विधि

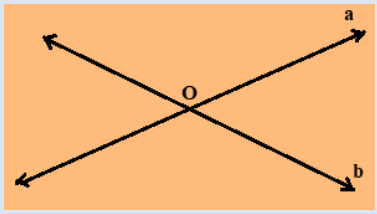
❖ **व्युत्क्रम =** उल्टा अर्ताथ भिन्न का अंश तथा हर को आपस में बदलना, $\frac{2}{3}$ का व्युत्क्रम $\frac{3}{2}$ होगा |



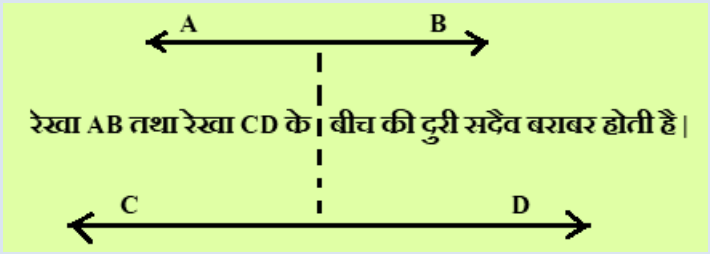
❖ **संपाती रेखाएँ =** एक रेखा का दूसरी रेखा पर स्थित होना, एक रेखा पर ही दो रेखा आना | रेखा c तथा रेखा d एक दुसरे पर स्थित है | ये रेखाएँ संपाती रेखाएँ है |



❖ **प्रतिच्छेदी रेखाएँ =** आपस में काटने वाली रेखाएँ रेखा a तथा रेखा b बिंदु O पर प्रतिच्छेद(काट) रही है | ये रेखाएँ (रेखा a तथा रेखा b) प्रतिच्छेदी रेखाएँ है |



❖ **समांतर रेखाएँ =** दो रेखाओ के बीच बराबर अंतर होना | रेखा AB रेखा CD के समान्तर है|



❖ **अद्वितीय हल =** ग्राफ पर दो रेखाओं के द्वारा प्रतिच्छेद वाला बिंदु

❖ **प्रतिस्थापन =** एक समीकरण से एक चर में बदलकर दूसरी समीकरण में मान स्थापित करना |

❖ **विलोपन =** एक चर के गुणांक को बराबर कर उसका विलोप करना |

❖ **से अधिक =** + उसी में

❖ **से कम =** - उसी से

❖ **से गुणा =** X उसी से

❖ **से भाग =** ÷ उसी से

ये समीकरण बनाने वाले शाब्दिक सवाल में आते है |