Pratham

# द्विघात समीकरण

बहुपद से आप परिचित हैं | जैसे (i) $x + 5$, (ii) $\mathbf{2x^2 + 3}$, (iii) $3x^3 + 4x^2 + 1$, इन बहुपदों में बहुपद (i) की घात 1, बहुपद (ii) की घात 2, बहुपद (iii) की घात 3 है |

यदि किसी बहुपद की घात 2 हो तो वह बहुपद द्विघात (द्वि = 2) बहुपद कहलाता है | और यदि इस **द्विघात बहुपद को शून्य के बराबर बनाया जाता है, तो यह एक समीकरण बन जाती है तथा इसको हम द्विघात समीकरण कहते हैं |**

$\mathbf{2x^2 + 3 = 0}$

एक द्विघात समीकरण को $\mathbf{ax^2 + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{cz} = 0}$ के रूप में लिखा जाता है | जहाँ a > 0 यहाँ a, b, c अचर राशियाँ है |

निम्नलिखित द्विघात समीकरणों में से कौन-कौन से द्विघात समीकरण है ?

(A) $3\boldsymbol{x^2} = \mathbf{5}$

(B) $\mathbf{x^2 + 2x + 3 = 0}$

(C) $\boldsymbol{x^3} + \mathbf{1} = \mathbf{3}\boldsymbol{x^2}$

(D) $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$

(E) $\mathbf{x^2} + \sqrt{\boldsymbol{x}} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$

(A) $3\boldsymbol{x^2} = \mathbf{5}$ यह एक द्विघात समीकरण है क्योंकी $3\boldsymbol{x^2} = \mathbf{5}$ को हम $3\boldsymbol{x^2} - \mathbf{5} = \mathbf{0}$ द्वारा व्यक्त कर सकते है |

(B) $\mathbf{x^2 + 2x + 3 = 0}$ भी एक द्विघात समीकरण है क्योकि $\mathbf{x^2 + 2x + 3}$ एक द्विघात बहुपद है |

(C) $\boldsymbol{x^3} + \mathbf{1} = \mathbf{3}\boldsymbol{x^2}$

$\boldsymbol{x^3} - \mathbf{3}\boldsymbol{x^2} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$ एक द्विघात समीकरण नहीं है क्योंकि x की अधिकतम घात 3 है|

(D) $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$

$x^2 + 1 = \frac{5}{2}x$

$2x^2 + 2 = 5x$

$2x^2 - 5x + 2 = 0$ यह $ax^2 + bx + cz = 0$ समीकरण को संतुष्ट करता है, इसलिए यह एक द्विघात समीकरण है |

(E) $\mathbf{x^2} + \sqrt{\boldsymbol{x}} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$

जोकि एक द्विघात समीकरण नहीं है क्योकि यह एक द्विघात बहुपद नहीं है | क्योंकि इसमें चर की घात पूर्ण संख्या नहीं है | $\{\sqrt{x}\}$

**द्विघात समीकरण का मानक रूप :**

(i) $(3t-1)(3t+1)=0$

$3t(3t+1) - 1(3t+1) = 0$

$9t^2 + 3t - 3t - 1 = 0$

$9t^2 - 1 = 0$

$9t^2 + 0t - 1 = 0$ अब यह मानक रूप में है |

**द्विघात समीकरण का हल** : रैखिक समीकरण की तरह द्विघात समीकरण में, चर का वह मान, जिसे समीकरण में चर के स्थान पर रखने से दोनों पक्ष बराबर हो जाए, समीकरण का मूल या हल कहलाता है | द्विघात समीकरण का हल ज्ञात करने के लिए दो बीजीय विधियाँ हैं |

(i) गुणनखंड विधि
(ii) द्विघात सूत्र के प्रयोग से

**निम्नलिखित समीकरणों को गुणनखंड विधि द्वारा हल :**

1. $\mathbf{x^2 + 3x - 18 = 0}$

   $\mathbf{x^2 + 3x - 18 = 0}$

   $\mathbf{x^2 + 6x - 3x - 18 = 0}$

   $\mathbf{x(x+6) - 3(x+6) = 0}$

   $\mathbf{(x+6) = 0 \; or \; (x-3) = 0}$

   $\mathbf{x = -6 \; or \; x = 3}$

रफ कार्य

-6 × 3   -6 + 3 = -3

or -3 × 6   **-3 + 6 = 3**

or -9 × 2   -9 + 2 = -7

2. $\mathbf{25x^2 - 10x + 1} = 0$

   $\mathbf{25x^2 - 10x + 1} = 0$

   $25x^2 - 5x - 5x + 1 = 0$

   $5x(5x-1) - 1(5x-1) = 0$

   $(5x-1)(5x-1) = 0$

   $(5x-1) = 0 \quad x = \frac{1}{5}$

रफ कार्य

5×5   5 + 5 =10

-5×-5   -5 -5 = -10

**द्विघात सूत्र**

द्विघात समीकरण का व्यापक स्वरूप $ax^2 + bx + c = 0$

दोनों ओर 4a से गुणा करने पर

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$

या $4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$ {दोनों ओर $b^2$ जोड़ने पर}

या $(2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 = b^2 - 4ac$

या $(2ax + b)^2 = \{\pm\sqrt{b2 - 4ac}\}^2$

या $2ax + b = \pm\sqrt{b2 - 4ac}$

या $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

इससे हमे द्विघात समीकरण के दो हल प्राप्त होते हैं |

$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ तथा $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

यहाँ व्यंजक $(b^2 - 4ac)$ द्विघात समीकरण के हल को संख्या ज्ञात करता है व इसके **मूलो की प्रकृति** बताता है :

द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0, a\neq 0$ में यदि

(1) $D = b^2 - 4ac > 0$ हो तो समीकरण के दो वास्तविक भिन्न मूल होंगें |

(2) $D = b^2 - 4ac = 0$ हो तो समीकरण के दो वास्तविक समान मूल होंगे |

$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$

(3) $D = b^2 - 4ac < 0$ समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं होगा क्योंकि ऋणात्मक संख्या का वर्गमूल वास्तविक संख्या नहीं होती |

**बिना मूल ज्ञात किए, निम्न समीकरणों के मूलो की प्रकृति पर टिप्पणी :**

(i) $3x^2 - 7x + 2 = 0$

समीकरण $3x^2 - 7x + 2 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + cz = 0$ से करने पर

$a = 3, \ b = -7, \ c = 2$

समान मूलो के लिए –

$D = b^2 - 4ac$

$D = (-7)^2 - 4 \times 3 \times 2$

$D = 49 - 24$

$D = 25$

यहाँ $D > 0$ है | अत: समीकरण के दो वास्तविक भिन्न मूल होंगे |

(ii) $25x^2 + 20x + 4 = 0$

समीकरण $25x^2 + 20x + 4 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + cz = 0$ से करने पर

$a = 25, \ b = 20, \ c = 4$

$D = b^2 - 4ac$

$D = (20)^2 - 4 \times 25 \times 4$

$D = 400 - 400$

$D = 0$

अत: समीकरण के दो वास्तविक समान मूल होंगे |

(iii) $\mathbf{x^2 - x + 1 = 0}$

समीकरण $x^2 - x + 1 = 0$ की तुलना $\mathbf{ax^2 + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{cz} = 0}$ से करने पर

$a = 1, \; b = -1, \; c = 1$

$D = b^2 - 4ac$

$D = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1$

$D = 1 - 4$

$D = -3$

$D < 0$ है | अत: समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं होगा क्योंकि ऋणात्मक संख्या का वर्गमूल एक वास्तविक संख्या नहीं होती है |

**द्विघात सूत्र से निम्न समीकरण को हल कीजिए |**

(i) $\mathbf{y^2 - 14y + 13}$

समीकरण $y^2 - 14y + 13$ की तुलना $\mathbf{ax^2 + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{cz} = 0}$ से करने पर

$a = 1 \;, \; b = -14, \; c = +13$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \times 1 \times (13)}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 52}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{144}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{14 \pm 12}{2}$$

अत: समीकरण के मूल

| | |
|---|---|
| $x = \frac{14+12}{2}$ | $x = \frac{14-12}{2}$ |
| $x = \frac{26}{2}$ | $x = \frac{2}{2}$ |
| $x = 13$ | $x = 1$ |