

द्विघात समीकरण

निम्नलिखित द्विघात समीकरणों में से कौन-कौन से द्विघात समीकरण है ?

(A) $3x^2 = 5$

(B) $x^2 + 2x + 3 = 0$

(C) $x^3 + 1 = 3x^2$

(D) $(x + 1)(x + 3) = 2x + 1$

(E) $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$

(F) $x^2 + \sqrt{x} + 1 = 0$

(A) $3x^2 = 5$ यह एक द्विघात समीकरण है क्योंकि $3x^2 = 5$ को हम $3x^2 - 5 = 0$ द्वारा व्यक्त कर सकते हैं।

(B) $x^2 + 2x + 3 = 0$ भी एक द्विघात समीकरण है क्योंकि $x^2 + 2x + 3$ एक द्विघात बहुपद है।

(C) $x^3 + 1 = 3x^2$

$x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ एक द्विघात समीकरण नहीं है क्योंकि x की अधिकतम घात 3 है।

(D) $(x + 1)(x + 3) = 2x + 1$

$$x(x + 3) + 1(x + 3) = 2x + 1$$

$$x^2 + 3x + x + 3 = 2x + 1$$

$$x^2 + 4x - 2x = 1 - 3$$

$x^2 + 2x + 2 = 0$ यह $ax^2 + bx + cz = 0$ समीकरण को संतुष्ट करता है, इसलिए यह एक द्विघात समीकरण है।

(E) $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$

$$x^2 + 1 = \frac{5}{2}x$$

$$2x^2 + 2 = 5x$$

$2x^2 - 5x + 2 = 0$ यह $ax^2 + bx + cz = 0$ समीकरण को संतुष्ट करता है, इसलिए यह एक द्विघात समीकरण है।

(F) $x^2 + \sqrt{x} + 1 = 0$

जोकि एक द्विघात समीकरण नहीं है क्योंकि यह एक द्विघात बहुपद नहीं है। क्योंकि इसमें चर की घात पूर्ण संख्या नहीं है। $\{\sqrt{x}\}$

निम्नलिखित में से कौन कौन से समीकरण द्विघात समीकरण है।

(i) $3x^2 + 5 = x^3 + 1$

(ii) $(5y + 1)(3y - 1) = y + 1$

$$(iii) \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{5}{2}$$

$$2(x^2 + 1) = 5(x+1)$$

$$2x^2 + 2 = 5x + 5$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \text{ अतः यह द्विघात समीकरण है।}$$

$$(iv) 3x + 2x^2 = 5x - 4$$

निम्नलिखित द्विघात समीकरणों में कौन कौन से समीकरण मानक रूप में है | जो मानक रूप में नहीं है | उन्हें मानक रूप में लिखिए ?

$$(i) 3y^2 - 2 = y + 1$$

$$(ii) 5 - 3x - 2x^2 = 0 \text{ यह मानक रूप में नहीं है, इसका मानक रूप } -2x^2 - 3x + 5 = 0 \text{ है।}$$

$$(iii) (3t - 1)(3t + 1) = 0$$

$$3t(3t + 1) - 1(3t + 1) = 0$$

$$9t^2 + 3t - 3t - 1 = 0$$

$$9t^2 - 1 = 0$$

$$9t^2 + 0t - 1 = 0 \text{ अब यह मानक रूप में है।}$$

$$(iv) 5 - x = 3x^2$$

निम्नलिखित समीकरणों को गुणखंड विधि द्वारा हल कीजिए।

$$1. (2x + 3)(x + 2) = 0$$

$$\text{हल : } (2x + 3)(x + 2) = 0$$

$$2x + 3 = 0 \text{ या } x + 2 = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ या } x = -2$$

$$2. 3x^2 - 4x - 7 = 0$$

$$3. x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$4. 25x^2 - 10x + 1 = 0$$

$$25x^2 - 10x + 1 = 0$$

$$25x^2 - 5x - 5x + 1 = 0$$

$$5x(5x-1) - 1(5x-1) = 0$$

$$(5x-1)(5x-1) = 0$$

रफ कार्य

$$5 \times 5 \quad 5 + 5 = 10$$

$$-5 \times -5 \quad -5 - 5 = -10$$

$$(5x - 1) = 0$$

$$x = \frac{1}{5}$$

$$5. \quad 4x^2 - 8x + 3 = 0$$

द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ में यदि

1. $D = b^2 - 4ac > 0$ हो तो समीकरण के दो वास्तविक भिन्न मूल होंगे।

2. $D = b^2 - 4ac = 0$ हो तो समीकरण के दो वास्तविक समान मूल होंगे।

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

3. $D = b^2 - 4ac < 0$ समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं होगा क्योंकि ऋणात्मक संख्या का वर्गमूल वास्तविक संख्या नहीं होती।

बिना मूल ज्ञात किए, निम्न समीकरणों के मूलों की प्रकृति पर टिप्पणी कीजिए:

(i) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

(ii) $25x^2 + 20x + 4 = 0$

समीकरण $25x^2 + 20x + 4 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + cz = 0$ से करने पर

$$a = 25, \quad b = 20, \quad c = 4$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (20)^2 - 4 \times 25 \times 4$$

$$D = 400 - 400$$

$$D = 0$$

अतः समीकरण के दो वास्तविक समान मूल होंगे।

(iii) $x^2 - x + 1 = 0$

समीकरण $x^2 - x + 1 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + cz = 0$ से करने पर

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = 1$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1$$

$$D = 1 - 4$$

$$D = -3$$

$D < 0$ है | अतः समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं होगा क्योंकि ऋणात्मक संख्या का वर्गमूल एक वास्तविक संख्या नहीं होती है |

द्विघात सूत्र से निम्न समीकरण को हल कीजिए |

$$(i) x^2 - 15x + 50 = 0$$

$$a = 1, b = -15, c = 50$$

$$x = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4(1)(50)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-(-15) \pm \sqrt{225 - 200}}{2}$$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$x = \frac{15 + 5}{2}$	$x = \frac{15 - 5}{2}$
$x = \frac{20}{2}$	$x = \frac{10}{2}$
$x = 10$	$x = 5$

$$(ii) 21 + x = 2x^2$$

$$(iii) 2x^2 - x - 6 = 0$$

शाब्दिक प्रश्न

1. यदि दो क्रमागत सम संख्याओं के वर्गों का योगफल 164 है | संख्याएँ ज्ञात कीजिए |

हल: माना कि एक संख्या x है | याद रखिये सम संख्या में 2 जोड़ने पर अगली सम संख्या प्राप्त होती है |

अतः x के अगली सम संख्या $x + 2$ होगी |

अब प्रश्न इन के वर्गों के योग के बराबर 164 बता रहा है |

अतः प्रश्न के अनुसार

$$x^2 + (x + 2)^2 = 164$$

$$\text{या } x^2 + x^2 + 4x + 4 = 164 \quad \{ (x+2)^2 = x^2 + 2(2x) + 4 \}$$

$$\text{या } 2x^2 + 4x - 160 = 0 \quad \text{पक्षांतरण करने पर}$$

$$\text{या } x^2 + 2x - 80 = 0$$

$$\text{या } x^2 + 10x - 8x - 80 = 0$$

$$\text{या } x(x + 10) - 8(x + 10) = 0$$

$$\text{या } (x + 10)(x - 8) = 0$$

$$\text{या } x + 10 = 0 \text{ or } x - 8 = 0$$

$$\text{या } x = -10, \text{ or } x = 8$$

अतः एक संख्या 8, व दूसरी क्रमागत सम संख्या 10 होगी |

2. दो क्रमागत विषम पूर्णाकों के वर्गों का योगफल 290 है | पूर्णांक ज्ञात कीजिए |
3. एक आयताकार बाग की लम्बाई उसकी चौड़ाई से 7 मीटर अधिक है | यदि बाग का क्षेत्रफल 144 वर्ग मी हो, तो बाग की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए |
4. दो अंकों की एक संख्या का दहाई का अंक, इकाई के अंक के दुगुने से 2 अधिक है | यदि अंकों का गुणनफल 24 हो, तो संख्या ज्ञात कीजिए |

हल : माना कि संख्या के इकाई का अंक x हैं |

$$\text{तब दहाई का अंक} = 2x + 2$$

$$\text{पुनः प्रश्न के अनुसार अंकों का गुणनफल} = 24$$

$$\text{अर्थात् } x(2x + 2) = 24$$

$$x(2x) + x(2) = 24$$

$$2x^2 + 2x = 24$$

$$2x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$x^2 + x - 12 = 0 \text{ \{ दोनों ओर 2 से भाग देने पर \}}$$

$$x^2 + 4x - 3x - 12 = 0$$

$$x(x + 4) - 3(x + 4) = 0$$

$$(x + 4)(x - 3) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ or } x + 4 = 0$$

$$x = 3 \text{ or } x = -4$$

क्योंकि किसी संख्या के इकाई का अंक ऋणात्मक नहीं हो सकता है | इसलिए उक्त संख्या के इकाई का अंक = 3

$$\text{संख्या के दहाई का अंक} = 2(3) + 2 = 8$$

अतः अभीष्ट संख्या = 83 है |

5. दो अंकों की संख्या के अंकों का योग 13 यदि इनके वर्गों का योग 89 हो, तो संख्या ज्ञात कीजिए |

6. एक समकोण त्रिभुज का कर्ण 13 सेमी है | यदि शेष दो भुजाओं में 7 सेमी का अंतर हो, तो शेष दोनों भुजाएँ ज्ञात कीजिए |

$$\text{Ans.1. } \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{34}{15}$$

$$\frac{x^2 + (x+1)^2}{x(x+1)} = \frac{34}{15}$$

$$15x^2 + 15x^2 + 15 + 30x = 34x^2 + 34x$$

$$-4x^2 - 4x + 15 = 0$$

समीकरण $-4x^2 - 4x + 15 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + cz = 0$ से करने पर

$$a = -4, b = -4, c = 15$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-4)^2 - 4 \times (-4) \times 15$$

$$D = 16 + 240$$

$$D = 256$$

अभी $D > 0$

अतः समीकरण के दो वास्तविक भिन्न मूल होंगे |

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times (-4) \times 15}}{2 \times (-4)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 240}}{-8}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{256}}{-8}$$

$$x = \frac{4 \pm 16}{-8}$$

अतः समीकरण के मूल

$$x = \frac{4+16}{-8} \quad \left| \quad x = \frac{4-16}{-8}$$

$$x = \frac{20}{-8} \quad \left| \quad x = \frac{-12}{-8}$$

$$x = \frac{-5}{2} \quad \left| \quad x = \frac{3}{2}$$