નોંધ

2

ઘાતકી અને કરણી

બે તેથી વધુ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કેવી રીતે કરવો તે તમે અગાઉના પાઠમાં શીખી ગયા છો. તમે નીચેની (વિગતોને) સરળતાથી લખી શકશો.

$4 \times 4 \times 4 = 64, 11 \times 11 \times 11 \times 11 = 14641$ and

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$

(હવે) જ્યારે 13 નો 15 વખત ગુણાકાર કરવાની પરિસ્થિતિમાં વિચાર કરો. તે લખવાનું કેટલું મુશ્કેલ છે ?

$13 \times 13 \times 13 \times$.................15 વખત

આ પ્રકરણમાં આપણો આ મુશ્કેલીનું નિવારણ ઘાતાંક સંકેત પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીને આપણે તેનો અર્થ સમજીશું, ઘાતાંકના નિયમો લખીશું અને સાબિત કરીશું. આપણે ઘાતાંકના નિયમો કેવી રીતે વાપરવા તે શીખીશું. વાસ્તવિક સંખ્યાઓને મૂળ પૂર્ણાંકના ઘાતના ગુણાકાર સ્વરૂપે અભિવ્યક્ત કરીશું.

આ પ્રકરણના પછીના વિભાગમાં આપણે $a^{1/q}$ સંખ્યાનો અર્થ qth નું a મૂળ તરીકે આપીશું. અમે તેમને કરણી, ઘાતાંક, મૂલાધાર વગેરેનો પરીચય કરાવીશું. ફરીથી આપણે કરણીના નિયમોની ચર્ચા કરીશુ અને કરણીનું સૌથી સાદું (લઘુત્તમ) સ્વરૂપ શોધીશું. આપણે કરણીનો સંમેયકારક અવઅવ અને આપેલ કરણીમાં છેદનો સંમેયકારક અવયવ શબ્દનો અર્થ શીખીશું.

હેતુઓ

આ પાઠનો અભ્યસ કર્યા પછી તમે......

- પુનરાવર્તિત ગુણાકારને ઘાતાંક સંકેત પદ્ધતિમાં અને ઘાતાંકને પુનરાવર્તિત ગુણાકાર સ્વરૂપે લખી શકાશો.
- ઘાતાંક સંકેત પદ્ધતિમાં લખેલી સંખ્યાઓ આધાર અને ઘાતાંક ઓળખી શકશો.
- પ્રાકૃત્તિક સંખ્યાને મૂળ પૂર્ણાંકના ઘાતના ગુણાકાર સ્વરૂપે અભિવ્યક્તિ કરી શકશે.
- ઘાતાંકના નિયમો જણાવી શકશો.
- a^0, a^{-m} અને $a^{\frac{p}{q}}$ નો અર્થ સમજાવી શકશો.
- ઘાતાંકના નિયમોનો ઉપયોગ કરીને ઘાતાંકમાં સમાયેલ અભિવ્યક્તિઓનો ઉપયોગ કરી શકાશો.

- આપેલ અસંમેય સંખ્યાઓના ગણમાંથી કરણીને ઓળખી શકશો.
- કરણીના મૂલ્યાંક અને મૂલધાર ઓળખી શકશો.
- કરણીના નિયમો જણાવી શકશો.
- આપેલ કરણીને સરળતમ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકશો.
- સમરૂપ અને વિષમરૂપ કરણીનું વર્ગીકરણ કરી શકશો.
- જુદાજુદા ઘાત વાળી કરણીને એક જ ઘાતની કરણીમાં ફેરવી શકશો.
- કરણી ઉપરની ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ કરી શકશો.
- આપેલ કરણીને ચડતા ઉતરકા ક્રમમાં ગોઠવી શકાશે.
- આપણે કરણીનો સંકોચકારક અવયવ શોધી શકશો.
- $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ અને $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, સ્વરૂપની કરણીના છેદનું સંક્ષેપકરણ કરી શકાશે. (જ્યાં x અને y પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ અને a અને b પૂર્ણાંક છે.)
- કરણીવાળી અભિવ્યક્તિઓનું સાદું રૂપ આપી શકાશે.

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

- પ્રારંભિક સંખ્યાઓ.
- સંખ્યાઓ પરની ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયો.
- સંમેય સંખ્યાઓ.
- સંખ્યાઓમાં ક્રમિકતાનો સંબંધ

1.1 ઘાતાંક સંકેત પદ્ધતિ

નીચેના ગુણાકાર (વિશે) વિચારો.

(i) 7×7 (ii) $3 \times 3 \times 3$ (iii) $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$

(1) માં બે વખત લઈને ગુણાકાર કરેલ છે તેથી તેને 7^2 એમ લખાય.

(2) માં 3 ને ત્રણ વખત લઈને તેમનો ગુણાકાર કરેલ છે તેથી તેને 3^3 એમ લખાય,

(3) 6 ને પાંચ વખત લઈ તેમનો ગુણાકાર કરવામાં આવ્યો છે તેથી તેને 6 એમ લખાય.

7^2 ને સાતનો બે ઘાત અથવા સાતનો વર્ગ એમ વંચાય અહીં સાતને આધાર અને 2 ને ઘાતાંક કહેવાય છે.

તેજ રીતે 3^3 ને ત્રણનો ત્રણ ઘાત અથવા ત્રણનો ઘન એમ વંચાય.

તેજ રીતે 6^5 ને છ નો પાંચઘાત (પંચઘાત) એમ વંચાય.

ઉપરનાં ઉદાહરણ પરથી આપણે કહીએ કે

સંખ્યાના તેજ સંખ્યાવડે વધારે વખતના ગુણાકારને લખવા માટેની સંકેત પદ્ધતિને ઘાતાંક સંકેત પદ્ધતિ અથવા ઘાતાંક સ્વરૂપ કહેવાય છે.

આમ, $5\times5\times\ldots\ldots 20$ વખત $= 5^{20}$ અને $(-7)\times(-7)\ldots\ldots 10$ વખત $= (17)^{10}$

5^{20} માં 5 એ પાયો અને 20 એ ઘાતાંક છે.

$(-7)^{10}$ માં -7 એ પાયો અને10 એ ઘાતાંક છે.

તે જ રીતે સંમેય સંખ્યાને તેજ સંખ્યાવડે કેટલી વખત ગુણાકારના ચોક્કસ લેખન માટે ઘાતાંક સંકેત પદ્ધતિનો ઉપયોગ થઈ શકે છે. (કરી શકાય છે.)

આ પ્રમાણે, $\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\ldots\ldots.16$ અને $= \left(\frac{3}{5}\right)^{16}$

અને $\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times\ldots\ldots\ldots$ 10 અને $= \left(-\frac{1}{3}\right)^{10}$

સામાન્યતઃ જો a કોઈ સંમેય સંખ્યા હોય, તો axaxax........ m વખત $= a^m$; a ને આધાર અને m ને ઘાતાંક કહેવાય છે.

ઉપરની ચર્ચાને સ્પષ્ટ કરવા માટે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ....

ઉદાહરણ : 2.1 નીચેના દરેકનું મૂલ્યાંકન કરો :

(i) $\left(\frac{2}{7}\right)^3$ (ii) $\left(-\frac{3}{5}\right)^4$

ઉકેલ : (i) $\left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{2}{7}\times\frac{2}{7}\times\frac{2}{7} = \frac{(2)^3}{(7)^3} = \frac{8}{343}$

(ii) $\left(-\frac{3}{5}\right)^4 = \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{(-3)^4}{(5)^5} = \frac{81}{625}$

ઉદાહરણ : 2.2 નીચેના દરેકને ઘાતાંકમાં દર્શાવો.

(i) $(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)$

(ii) $\left(\frac{3}{11}\right)\times\left(\frac{3}{11}\right)\times\left(\frac{3}{11}\right)\times\left(\frac{3}{11}\right)$

ઉકેલ: (i) $(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = (-5)^7$

(ii) $\left(\frac{3}{11}\right) \times \left(\frac{3}{11}\right) \times \left(\frac{3}{11}\right) \times \left(\frac{3}{11}\right) = \left(\frac{3}{11}\right)^4$

ઉદાહરણ : 2.3 નીચેના દરેકને ઘાતાંક સંકેત પદ્ધતિમાં દર્શાવો અને દરેક કિસ્સામાં આધાર અને ઘાતાંક લખો.

(i) 4096 (ii) $\frac{125}{729}$ (iii) -512

ઉકેલ : (i) $4096 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$

$= (4)^6$

અહીં પાયો $= 4$ *અને ઘાતાંક* $=$ *છે.*

બીજી રીતે $4096 = (2)^{12}$

પાયો $= 2$, *ઘાતાંક* $= 12$

(ii) $\frac{125}{729} = \frac{5}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{5}{9} = \left(\frac{5}{9}\right)^3$

અહીં પાયો $= \left(\frac{5}{9}\right)$ *અને ઘાતાંક* $= 3$

(iii) $512 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^9$

અહીં પાયો $= 2$ *અને ઘાતાંક* $= 9$

ઉદાહરણ : 2.4 નીચેનાનું સાદુ રૂપ આપો.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^4$$

ઉકેલ : $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3^3}{2^3}$

તે જ રીતે $\left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{4^4}{3^4}$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{3^3}{2^3} \times \frac{4^4}{3^4}$$

$$= \frac{3^3}{8} \times \frac{16 \times 16}{3^4} = \frac{32}{3}$$

ઉદાહરણ : 2.5 નીચેના દરેકનો વ્યસ્ત શોધો અને તેમને ઘાતાંકના સ્વરૂપમાં લખો.

(i) 3^5 (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ (iii) $\left(-\frac{5}{6}\right)^9$

(i) $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$= 243$

3^5 **ની વ્યસ્ત** $\frac{1}{243} = \left(\frac{1}{3}\right)^5$

નોંધ : આપણે જાણીએ છીએ કે 3 સિવાય લખી શકાય.

3^5 ની વ્યસ્ત સંખ્યા $\left(\frac{1}{3}\right)^5$ છે એમ વિવરણ કર્યા સિવાય લખી શકાય.

(ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ *ની વ્યસ્ત સંખ્યા* $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ *છે. (કારણ કે* $\frac{3}{4}$ *ની વ્યસ્ત* $\frac{4}{3}$ *છે.)*

(iii) $\left(-\frac{5}{6}\right)^9$ *ની વ્યસ્ત સંખ્યા* $\left(\frac{-6}{5}\right)^9$ *છે. (કારણ કે* $-\frac{5}{6}$ *ની વ્યસ્ત* $\frac{-6}{5}$ *છે.)*

ઉપરના ઉદાહરણ પરથી આપણે કહી શકીએ કે જો એ કોઈ શૂન્ય સિવાયની સંમેય સંખ્યા હોય અને

m *એ કોઈ ઘનપૂર્ણાંક હોય, તો* $\left(\frac{p}{q}\right)^m$ *ની વ્યસ્ત સંખ્યા* $\left(\frac{q}{p}\right)^m$ *છે.*

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 2.1

1. *નીચેના દરેકને ઘાતાંક સ્વરૂપમાં દર્શાવો.*

(i) $(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)$

(ii) $\left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right) \times \ldots$ 10 *વખત*

(iii) $\left(-\frac{5}{7}\right)\times\left(-\frac{5}{7}\right)\times\ldots.20$ વખત

2. નીચેના દરેકનો પાયો અને ઘાતાંક દર્શાવો. (લખો)

(i) $(-3)^5$ (ii) $(7)^4$ (iii) $\left(-\frac{2}{11}\right)^8$

3. નીચેના દરેકનું મૂલ્યાંકન કરો. (નીચેના દરેકની કિંમત શોધો.)

(i) $\left(\frac{3}{7}\right)^4$ (ii) $\left(\frac{-2}{9}\right)^4$ (iii) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$

4. નીચેનાનું સાદુ રૂપ આપો.

(i) $\left(\frac{7}{3}\right)^5\times\left(\frac{3}{7}\right)^6$

(ii) $\left(-\frac{5}{6}\right)^2\div\left(-\frac{3}{5}\right)^2$

5. નીચેના દરેકનો વ્યસ્ત શોધો.

(i) 3^5 (ii) $(-7)^4$ (iii) $\left(-\frac{3}{5}\right)^4$

2.2 અવિભાજ્ય અવયવીકરણ

યાદ કરો કે કોઈ પણ (સંયુક્ત) વિભાજ્ય સંખ્યાને બે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અભિવ્યક્ત કરી શકાય. આપણે વિભાજ્ય સંખ્યાઓ 72,760 અને 7623 લઈએ.

(i) $72 = 2\times2\times2\times3\times3$

$= 2^3\times3^2$

(ii) $760 = 2\times2\times2\times5\times19$

$= 2^3\times5^1\times19^1$

(iii) $7623 = 3\times3\times7\times11\times11$

$= 3^2\times7^1\times11^2$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 72 \\ \hline 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 7623 \\ \hline 3 & 2541 \\ \hline 7 & 847 \\ \hline 11 & 121 \\ \hline & 11 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 760 \\ \hline 2 & 380 \\ \hline 2 & 190 \\ \hline 5 & 95 \\ \hline & 19 \end{array}$$

યાદ કરો કે 1 સિવાયની કોઈપણ પ્રાકૃત્તિક સંખ્યા અનન્ય રીતે અવયવોના ક્રમને અવગણીને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ઘાતાંકોના ગુણનફળ તરીકે અભિવ્યક્ત કરી શકાય.

આપણે કેટલાક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 2.6 : 24300 ને ઘાતાંકીય સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : $24300 = 3 \times 3\times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

$:- 24300 = 2^2 \times 3^5 \times 5^2$

ઉદાહરણ 2.7 : 98784 ને ઘાતાંકિય સ્વરૂપમાં જણાવો.

ઉકેલ :

2	98784
2	49392
2	24696
2	12348
2	6174
3	3087
3	1029
7	343
7	49
	7

$\therefore\ 98784 = 2^5 \times 3^2 \times 7^3$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 2.2

1. નીચેનાની મૂળ સંખ્યાના ઘાતના ગુણાકાર સ્વરૂપે દર્શાવો.

   (i) 429 (ii) 648 (iii) 1512

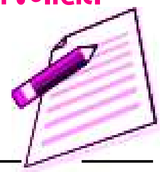
2. નીચેના દરેકને ઘાતાંક સ્વરૂપે દર્શાવો.

   (i) 729 (ii) 512 (iii) 2592

   (iv) $\frac{1331}{4096}$ (v) $-\frac{243}{32}$

2.3 ઘાતાંકના નિયમો.

નીચેનાનો અભ્યાસ કરો.



(i) $3^2 \times 3^3 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3) = (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$= 3^5 = 3^{2+3}$

(ii) $(-7)^2 \times (-7)^4 = [(-7) \times (-7)] \times [(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)]$

$= [(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)]$

$= (-7)^6 = (-7)^{2+4}$

(iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right)$

$= \left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right)$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^7 = \left(\frac{3}{4}\right)^{3+4}$

(iv) $a^3 \times a^4 = (a \times a \times a) \times (a \times a \times a \times a) = a^7 = a^{3+4}$

ઉપરનાં ઉદાહરણો પરથી આપણે જોઈએ છીએ કે

નિયમ 1 : *જો a કોઈ સંમેય સંખ્યા હોય અને m અને n બે ઘન પૂર્ણાંક હોય , તો*

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

ઉદાહરણ 2.8 : $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^5$ *ની કિંમત શોધો.*

અત્રે $= -\frac{3}{2}$, $m = 3$ અને $n = 5$.

:- $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^5 = \left(-\frac{3}{2}\right)^{3+5} = \left(-\frac{3}{2}\right)^8 = \frac{6561}{256}$

ઉદાહરણ 2.9 : $\left(\frac{7}{4}\right)^2 \times \left(\frac{7}{4}\right)^3$ **ની કિંમત શોધો.**

ઉકેલ : આગળની માફક

$$\left(\frac{7}{4}\right)^2 \times \left(\frac{7}{4}\right)^3 = \left(\frac{7}{4}\right)^{2+3} = \left(\frac{7}{4}\right)^5 = \frac{16807}{1024}$$

હવે નીચેનાનો અભ્યાસ કરો.

(i) $7^5 \div 7^3 = \frac{7^5}{7^3} = \frac{7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7} = 7\times7 = 7^2 = 7^{5-3}$

(ii) $(-3)^7 \div (-3)^4 = \frac{(-3)^7}{(-3)^4} = \frac{(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)}{(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)}$

$$= (-3)(-3)(-3) = (-3)^3 = (-3)^{7-4}$$

ઉપર પ્રમાણે આપણે માનીએ છીએ કે

નિયમ - 2 જો n કોઈ શૂન્યેતર સંખ્યા હોય, m અને n ઘનપૂર્ણાંક હોય. (જ્યાં $m > n$), તો

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

ઉદાહરણ 2.10 :

ઉકેલ : $\left(\frac{35}{25}\right)^{16} \div \left(\frac{35}{25}\right)^{13}$

$$= \left(\frac{35}{25}\right)^{16-13} = \left(\frac{35}{25}\right)^3 = \left(\frac{7}{5}\right)^3 = \frac{343}{125}$$

નિયમ : 2, માં $m < n$ $n > m$,

તો,

નિયમ : જો a કોઈ શૂન્યેતર સંખ્યા હોય, m અને n ઘનપૂર્ણાંક હોય તથા m< n અથવા n > m

હોય તો $a^m \div a^n = \frac{1}{a^{m-n}}$

ઉદાહરણ 2.11 : $\left(\frac{3}{7}\right)^6 \div \left(\frac{3}{7}\right)^9$

અહીં $a = \frac{3}{7}$, $m = 6$ *અને* $n = 9$.

$$\therefore \left(\frac{3}{7}\right)^6 \div \left(\frac{3}{7}\right)^9 = \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{9-6}}$$

$$= \frac{7^3}{3^3} = \frac{343}{27}$$

નીચેનાનો અભ્યાસ કરો.

(i) $\left(3^3\right)^2 = 3^3 \times 3^3 = 3^{3+3} = 3^6 = 3^{3\times 2}$

(ii) $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^2\right]^5 = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^2$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{2+2+2+2+2} = \left(\frac{3}{7}\right)^{10} = \left(\frac{3}{7}\right)^{2\times 5}$$

ઉપરના બે ઉદાહરણો પરથી ૧પણે નીચે પ્રમાણે તારવણી કરી શકીએ.

નિયમ : 4 જો a કોઈ સંમેય સંખ્યા હોય, m અને n ધનપૂર્ણાંક હોય તો

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

આપણે એક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ : 2.12 $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^3$ **ની કિંમત શોધો.**

ઉકેલ : $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^3 = \left[\frac{2}{5}\right]^{2\times 3} = \left(\frac{2}{5}\right)^6 = \frac{64}{15625}$

2.3.1 શૂન્યઘાતાંક

યાદ કરો કે $a^m \div a^n = a^{m-n}$, *(જો $m > n$)*

$$= \frac{1}{a^{n-m}}, \text{ (જો } n > m)$$

જ્યારે ($m = n$) હોય ત્યારે આ વિગતને વિચારીએ.

$$\therefore\ a^m \div a^m = a^{m-m}$$

$$\Rightarrow \frac{a^m}{a^m} = a^0$$

$$\Rightarrow 1 = a^0$$

આમ આપણને એક અગત્યનો બીજો નિયમ પ્રાપ્ત થશે.

નિયમ-5 : જો a શૂન્ય સિવાયની કોઈ સંખ્યા હોય, તો $a^0 = 1$

ઉદાહરણ 2.13 : નીચેનાની કિંમત શોધો.

(i) $\left(\frac{2}{7}\right)^0$ (ii) $\left(\frac{-3}{4}\right)^0$

ઉકેલ : (i) $a^0 = 1$, *આ નિયમનો ઉપયોગ કરીએ તો* $\left(\frac{2}{7}\right)^0 = 1$

(ii) *ફરીથી* $a^0 = 1$, *ઉપયોગ કરીને,* $\left(\frac{-3}{4}\right)^0 = 1$ *મળે.*

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 2.3

1. *સાદુંરૂપ આપો અને પરિણામને ઘાતાંક સ્વરૂપે દર્શાવો.*

(i) $(7)^2 \times (7)^3$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$ (iii) $\left(-\frac{7}{8}\right)^1 \times \left(-\frac{7}{8}\right)^2 \times \left(-\frac{7}{8}\right)^3$

2. *સાદુંરૂપ આપો અને પરિણામને ઘાતાંક સ્વરૂપે દર્શાવો.*

(i) $(-7)^9 \div (-7)^7$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^8 \div \left(\frac{3}{4}\right)^2$ (iii) $\left(\frac{-7}{3}\right)^{18} \div \left(\frac{-7}{3}\right)^3$

3. *સાદુંરૂપ આપો અને પરિણામને ઘાતાંક સ્વરૂપે દર્શાવો.*

(i) $\left(2^6\right)^3$ (ii) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^3\right]^2$ (iii) $\left[\left(-\frac{5}{9}\right)^3\right]^5$

(iv) $\left(\frac{11}{3}\right)^5 \times \left(\frac{15}{7}\right)^0$ (v) $\left(-\frac{7}{11}\right)^0 \times \left(-\frac{7}{11}\right)^3$

4. *નીચેનાં પૈકી કયાં વિધાન સાચાં છે ?*

(i) $7^3 \times 7^3 = 7^6$

(ii) $\left(\frac{3}{11}\right)^5 \times \left(\frac{3}{11}\right)^2 = \left(\frac{3}{11}\right)^7$

(iii) $\left[\left(\frac{4}{9}\right)^5\right]^4 = \left(\frac{4}{9}\right)^9$

(iv) $\left[\left(\frac{3}{19}\right)^6\right]^2 = \left(\frac{3}{19}\right)^8$

(v) $\left(\frac{3}{11}\right)^0 = 0$

(vi) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4}$

(vii) $\left(\frac{8}{15}\right)^5 \times \left(\frac{7}{6}\right)^0 = \left(\frac{8}{15}\right)^5$

2.4 ઘાતાંક તરીકે ઋણ પૂર્ણાંક

1. આપણે જાણીએ છીએ કે 5 નો વ્યસ્ત $\frac{1}{5}$ છે. આપણે તેને 5^{-1} તરીકે લખીએ છીએ અને 5 નો (-1) ઘાત એમ વાંચીએ છીએ.

2. (-7) નો વ્યસ્ત $-\frac{1}{7}$ છે. આપણે તેને $(-7)^{-1}$ ઘાત એમ લખીએ છીએ અને (-7) નો (-1) ઘાત એમ વંચાય.

3. 5^2 નો વ્યસ્ત $\frac{1}{5^2}$ છે. આપણે તેને 5^{-2} એમ લખીએ છીએ અને (5) નો (-2) ઘાત એમ વાંચીએ છીએ.

   ઉપરોક્ત પરથી ફલીત થાય છે કે જો a કોઈ શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા હોય અને m કોઈ પૂર્ણાંક હોય, તે a^m નો વ્યસ્ત $\frac{1}{m}$ ને a^{-m} એમ લખાય અને a નો (-m) ઘાત એમ વંચાય.

$$\boxed{:-\ \frac{1}{a^m} = a^{-m}}$$

આપણે એક ઉદાહરણ વિશે વિચારીએ.

ઉદાહરણ 2.4 : નીચેના દરેકને ઘન પૂર્ણાંક સાથે (ધન ઘાતાંકમાં ફેરવી) ફરીથી લખો.

(i) $\left(\frac{3}{8}\right)^{-2}$ (ii) $\left(-\frac{4}{7}\right)^{-7}$

ઉકેલ :

$$\text{(i)}\quad \left(\frac{3}{8}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{8}\right)^{2}} = \frac{1}{\frac{3^2}{8^2}} = \frac{8^2}{3^2} = \left(\frac{8}{3}\right)^{2}$$

$$\text{(ii)}\quad \left(-\frac{4}{7}\right)^{-7} = \frac{1}{\left(-\frac{4}{7}\right)^{7}} = \frac{7^7}{(-4)^7} = \left(-\frac{7}{4}\right)^{7}$$

ઉપરના ઉદાહરણ પરથી આપણને નીચેનું પરિણામ મળે છે.

જો $\frac{p}{q}$ કોઈ શૂન્યેતર સંખ્યા હોય અને m કોઈ ઘન પૂર્ણાંક હોય, તો $\left(\frac{p}{q}\right)^{-m} = \frac{q^m}{p^m} = \left(\frac{q}{p}\right)^{m}$.

2.5 પૂર્ણાંક ઘાતાંકો માટે ઘાતાંકોના નિયમ.

ઋણ પૂર્ણાંકોને શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યાના ઘાતાંક તરીકે અર્થ નિશ્ચિત કર્યા બાદ આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે ઘાતાંકોના નિયમો ઋણ ઘાતાંકને પણ લાગુ પડે છે.

$$\text{(i)}\quad \left(\frac{3}{5}\right)^{-4} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{3} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^{4}} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{3} = \frac{3}{5}^{3-4}$$

$$\text{(ii)}\quad \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{2}} \times \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{2+3}} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2-3}$$

$$\text{(iii)}\quad \left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} \div \left(-\frac{3}{4}\right)^{-7} = \frac{1}{\left(-\frac{3}{4}\right)^{3}} \div \frac{1}{\left(-\frac{3}{4}\right)^{7}} = \frac{1}{\left(-\frac{3}{4}\right)^{3}} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^{7} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{7-3}$$

$$\text{(iv)}\quad \left(\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}\right)^{3} = \left[\left(\frac{7}{2}\right)^{2}\right]^{3} = \left(\frac{7}{2}\right)^{6} = \left(\frac{2}{7}\right)^{-6} = \left(\frac{2}{7}\right)^{-2\times 3}$$

ઉપરોક્ત ઉદાહરણો પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે નિયમો 1 થી 5 ઋણ ઘાતાંકોને પણ સરખા લાગુ પડે છે.

જો a અને b શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યાઓ હોય, અને m અને n કોઈ પૂર્ણાંક હોય, તો

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $a^m \, , \, a^n = a^{m-n}$ if $m > n$

   $= a^{n-m}$ if $n > m$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $(a \times b)^m = a^m \times b^m$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 2.4

1. $\left(\frac{-3}{7}\right)^{-2}$ સંમેય સંખ્યા તરીકે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

2. સંમેય સંખ્યાના ઘાત તરીકે ધન ઘનાંક સ્વરૂપે અભિવ્યક્ત કરો.

   (i) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-4}$ (ii) $12^5 \times 12^{-3}$ (iii) $\left[\left(\frac{3}{13}\right)^{-3}\right]^4$

3. સંમેય સંખ્યાના ઘાત તરીકે ઋણ ઘનાંક સ્વરૂપે અભિવ્યક્ત કરો.

   (i) $\left(\frac{3}{7}\right)^4$ (ii) $\left[(7)^2\right]^5$ (iii) $\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^2\right]^5$

4. સાદુ રૂપ આપો.

   (i) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^7$ (ii) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^4$ (iii) $\left(-\frac{7}{5}\right)^{-4} \div \left(-\frac{7}{5}\right)^{-7}$

5. નીચેના પૈકી કયા વિધાન સાચા છે ?

   (i) $a^{-m} \times a^n = a^{-m-n}$

   (ii) $(a^{-m})^n = a^{-mn}$

   (iii) $a^m \times b^m = (ab)^m$

   (iv) $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

(v) $a^{-m} \times a^{o} = a^{m}$

2.6 $a^{p/q}$ નો અર્થ.

આપણે જાણીએ છીએ કે m અને n ની તમામ પૂર્ણાંક કિંતમ માટે.

$$a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$$

જો a ધન સંમેય સંખ્યા હોય અને q પ્રાકૃત્તિક સંખ્યા હોય, તો

$a^{1/q}$, ની વ્યાખ્યા કરવા માટેની પદ્ધતિ કઈ?

ને q વારના ગુણાકાર વિશે વિચારો.

અર્થાત્, $\underbrace{a^{\frac{1}{q}} \times a^{\frac{1}{q}} \times a^{\frac{1}{q}} \ldots\ldots\ldots \times a^{\frac{1}{q}}}_{q \text{ વાર}} = a^{\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\ldots\ldots q \text{ વખત}}$

$$= a^{\frac{q}{q}} = a$$

બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો $a^{\frac{1}{q}}$ નો q ઘાત $= a$ અથવા

બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો $a^{\frac{1}{q}}$ એ a નું q મૂળ છે અને તે $\sqrt[q]{a}$ એમ લખાય.

ઉદાહરણ તરકે,

$$7^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{4}} = 7^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = 7^{\frac{4}{4}} = 7^{1} = 7$$

અથવા $7^{\frac{1}{4}}$ એ 7 ચતુર્થ મૂળ છે. અને તે $\sqrt[4]{7}$, આમ લખાય.

હવે આપણે a ના સંમેયઘાતની વ્યાખ્યા કરીએ.

જો a ધન વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, q પૂર્ણાંક હોય અને a પ્રાકૃત્તિક સંખ્યા હોય, તો $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^{p}}$

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે

$$\underbrace{a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \ldots\ldots\ldots \times a^{\frac{p}{q}}}_{q \text{ વખત}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\ldots\ldots q \text{ વખત}} = a^{\frac{p}{q}.q} = a^{p}$$

$$\therefore a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^{p}}$$

$a^{p/q}$ એ a^q નું q મૂળ છે.

આમ, $7^{\frac{2}{3}}$ એ 7^2 નું ઘનમૂળ છે.

નોંધ : (આપણે જોઈએ છીએ કે ઘાતાંક સંમેય સંખ્યા હોય, તો તેનો અંશ ઘાતાંક દર્શાવે છે અને તેનો છેદ મૂળ દર્શાવે છે. એટલે $7^{\frac{2}{3}}$ એ 7^2 નું ઘનમૂળ કહેવાય.)

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iv) $(ab)^m = a^m b^m$

(v) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

ઉપરના નિયમો ચકાસવા માટે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 2.15 નીચેનામું મુલ્ય શોધો.

(i) $(625)^{\frac{1}{4}}$ (ii) $(243)^{\frac{2}{5}}$ (iii) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-3/4}$

ઉકેલ :

(i) $(625)^{\frac{1}{4}} = (5\times5\times5\times5)^{\frac{1}{4}} = (5^4)^{\frac{1}{4}} = 5^{4\times\frac{1}{4}} = 5$

(ii) $(243)^{\frac{2}{5}} = (3\times3\times3\times3\times3)^{\frac{2}{5}} = (3^5)^{\frac{2}{5}} = 3^{5\times\frac{2}{5}} = 3^2 = 9$

(iii) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{-3}{4}} = \left(\frac{2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3}\right)^{\frac{-3}{4}}$

$$= \left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^{\frac{-3}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4\times\left(\frac{-3}{4}\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

તમારી પ્રગતિ ચકાશો 2.5

1. નીચેના દરેકનું સાદુરૂપ આપો.

(i) $(16)^{3/4}$ (ii) $\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$

2. નીચેના દરેકનું સાદુરૂપ આપો,

(i) $(625)^{-\frac{1}{4}} \div (25)^{-\frac{1}{2}}$

(ii) $\left(\frac{7}{8}\right)^{-\frac{1}{4}} \times \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{3}{4}}$

(iii) $\left(\frac{13}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} \times \left(\frac{13}{16}\right)^{\frac{1}{4}} \times \left(\frac{13}{16}\right)^{\frac{3}{2}}$

2.7 કરણી

તમે પાઠ 1 માં શીખ ગયા કે, √૨, √૩, √૫..... અસંમેય સંખ્યાઓ છે હવે આપણે વિશિષ્ટ પ્રકાની અસંમેય સંખ્યાઓ જે કરણી કહેવાય છે તે વિશે શીખીશું.

વ્યાખ્યા :

કરણી $\sqrt[n]{x}$,પ્રકાની ઘન અસંમેય સંખ્યા છે, જ્યાં x એ ઘન સંમેય સંખ્યા છે અને x નું n મૂળ ચોક્કસ રીતે શોધી શકતું નથી. આ રીતે કરણીની વ્યાખ્યા કરવામાં આવી છે. જે $\sqrt[n]{x}$ એ -

(અ) અસંમેય સંખ્યા હોય

(બ) ઘન સંમેય સંખ્યાનું મૂળ હોય છે.

તો અને તો જ $\sqrt[n]{x}$ એ કરણી છે.

2.7.1 કેટલાક પારિવારિક શબ્દો :

$\sqrt[n]{x}$ કરણીમાં સંકેત $\sqrt{}$ કરણી ચિહ્ન કહેવાય છે. મૂલ્યાંક 'n' કરણઈ ઘાત કહેવાય છે અને 'x' ને મૂલાધાર કહેવાય છે.

નોંધ : 1. જ્યારે કરણીનો ઘાત દર્શાવ્યો ન હોય, ત્યારે તે 2 લેવામાં આવે છે.દા.તા. $\sqrt{7}$ નો કરણી ઘાત 2 છે $(\sqrt{7} = \sqrt[2]{7})$ 2 છે.

2. $\sqrt[3]{8}$ એ કરણી નથી કારણ કે તેની કિંમત (તેનુ મુલ્ય) 2 નક્કી કરી શકાય છે જે સંમેય છે.

3. $\sqrt{2+\sqrt{2}}$,એ અસંમેય સંખ્યા છે છતાં કરણીપરથી કારણ કે તે અસંમેય સંખ્યાનું વર્ગમૂળ છે.

2.8 શુદ્ધ અને મિશ્ર કરણી

1. કરણી કે જેનો એક અવયવ માત્ર સંમેય સંખ્યા 1 હોય દાખલા તરીકે, $\sqrt[5]{16}$ અને $\sqrt[3]{50}$ એ શુદ્ધ કરણી છે.
2. કરણી કે જેનો અસંમેય અવયવ સાથે 1 સિવાયનો સંમેય અવયવ હોય, તેને મિશ્ર કરણી કહે છે.

   દાખલા તરીકે $2\sqrt{3}$ અન $3\sqrt[3]{7}$ મિશ્ર કરણી છે.

2.9 કરણીનો ક્રમ

કરણી $5\sqrt[3]{4}$, માં 5 ને કરણીનો સહ ગુણાંક કહેવામાં આવે છે. 3 એ કરણીનો મૂલાંક અને 4 એ મૂલાધાર છે.

આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 2.16 : નીચેનામાંથી કઈ (સંખ્યાને) કરણી છે ?

(i) $\sqrt{49}$ (ii) $\sqrt{96}$ (iii) $\sqrt[3]{81}$ (iv) $\sqrt[3]{256}$

ઉકેલ : (i) $\sqrt{49}=7$, જે સંમેય સંખ્યા છે.

\ $\sqrt{49}$ એ કરણી નથી.

(ii) $\sqrt{96}=\sqrt{4\times4\times6}=4\sqrt{6}$

\ $\sqrt{96}$ જે અસંમેય સંખ્યા છે.

$\sqrt{96}$ એ કરણી છે.

(iii) $\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{3\times3\times3\times3}=3\sqrt[3]{3}$, જે અસંમેય સંખ્યા છે.

\ $\sqrt[3]{81}$ એ કરણી છે.

(iv) $\sqrt[3]{256}=\sqrt[3]{4\times4\times4\times4}=4\sqrt[3]{4}$ જે અસંમેય સંખ્યા છે.

$\sqrt[3]{256}$ એ કરણી છે.

\ (ii), (iii) અને (iv) કરણીઓ છે.

ઉદાહરણ : નીચેની દરેક કરણીનો મૂલાંક અને મૂલધાર ઓળખવો.

(i) $\sqrt[5]{117}$ (ii) $\sqrt{162}$ (iii) $\sqrt[4]{213}$ (iv) $\sqrt[4]{214}$

ઉકેલ :1. મૂલાંક 5 અને મૂલાધાર 117

2. મૂલાંક 2 અને મૂલાધાર 162

3. મૂલાંક 4 અને મૂલાધાર 213

4. મૂલાંક 4 અને મૂલાધાર 241

ઉદાહરણ 2.18 નીચેનામાંથી શુદ્ધ અને મિશ્ર કરણી ઓળખાવો.

(i) $\sqrt{42}$ (ii) $4\sqrt[3]{18}$ (iii) $2\sqrt[4]{98}$

ઉકેલ : (1) $\sqrt{42}$ એ શુદ્ધ કરણી છે.

(2) $4\sqrt[3]{18}$ મિશ્ર કરણી છે.

(3) $2\sqrt[4]{98}$ એ મિશ્ર કરણી છે.

2.10 કરણીનો નિયમો :

કરણીના (સાબિતી સિવાયના) નીચે પ્રમાણે છે.

(i) $\left[\sqrt[n]{a}\right]^n = a$

(ii) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

(iii) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

જ્યાં a અને b ઘન સંમેય સંખ્યાઓ છે અને n એ ઘન પૂર્ણાંક છે.

આથી સમજ માટે કેટલાંક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ :2.19 કરણીના નિયમોનો ઉપયોગ કરીને નીચેના પૈકી કઈ કરણી છે અને કઈ નથી તે શોધો.

(i) $\sqrt{5}\times\sqrt{80}$ (ii) $2\sqrt{15}\div 4\sqrt{10}$

(iii) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16}$ (iÃk) $\sqrt{32}\div\sqrt{27}$

ઉકેલ : (i) $\sqrt{5}\times\sqrt{80} = \sqrt{5\times 80} = \sqrt{400} = 20\cdot$

જે સંમેય સંખ્યા છે.

\ $\sqrt{5}\times\sqrt{80}$ એ કરણી નથી.

(ii) $2\sqrt{15}\div 4\sqrt{10}=\dfrac{2\sqrt{15}}{4\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{15}}{2\sqrt{10}}$

$=\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{2\times 2\times 10}}=\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{40}}=\sqrt{\dfrac{3}{8}}$, જે અસંમેય સંખ્યા છે.

\ $2\sqrt{15}\div 4\sqrt{10}$ એ કરણી છે.

(iii) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{64}=4\Rightarrow$ એ કરણી નથી. (કારણ કે અસંમેય છે.)

(iv) $\sqrt{32}\div\sqrt{27}=\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{27}}=\sqrt{\dfrac{32}{27}}$, જે અસંમેય સંખ્યા છે.

\ $\sqrt{32}\div\sqrt{27}$ એ કરણી છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 2.6

1. નીચેના દરેક માટે મૂલાંક અને મૂલાધાર લખો.

   (i) $\sqrt[4]{64}$ (ii) $\sqrt[6]{343}$ (iii) $\sqrt{119}$

2. નીચેના પૈકી કઈ કરણી છે તે જણાવો.

   (i) $\sqrt[3]{64}$ (ii) $\sqrt[4]{625}$ (iii) $\sqrt[6]{216}$

   (iv) $\sqrt{5}\times\sqrt{45}$ (v) $3\sqrt{2}\times 5\sqrt{6}$

3. નીચેનામાંથી શુદ્ધ અને મિશ્ર કરણી ઓળખાવો.

   (i) $\sqrt{32}$ (ii) $2\sqrt[3]{12}$ (iii) $13\sqrt[3]{91}$ (iv) $\sqrt{35}$

2.11 કરણીના નિયમો :

યાદ કરો કે કરણી અપૂર્ણાંક ઘાતાંકવાળી સંખ્યાઓ તરીકે અભિવ્યક્ત કરી શકાય છે (દર્શાવી શકાય છે.) અગાઉ આ પાઠમાં શીખેલા ઘાતાંકના નિયમો પણ તેમને લાગુ પડે છે. આપણે આ નિયમોને ફરીથી યાદ કરીએ.

(i) $\sqrt[n]{x}\,.\,\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{xy}$ અથવા $x^{\frac{1}{n}}.y^{\frac{1}{n}}=(xy)^{\frac{1}{n}}$

(ii) $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}=\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$ અથવા $\dfrac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}}$

(iii) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}=\sqrt[mn]{x}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}$ અથવા $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}=x^{\frac{1}{mn}}=\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}$

(iv) $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$ અથવા $\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}}=x^{\frac{m}{n}}$

(v) $\sqrt[n]{x^p}=\sqrt[mn]{x^{pn}}$ અથવા $\left(x^p\right)^{\frac{1}{m}}=x^{\frac{p}{m}}=x^{\frac{pn}{mn}}=\left(x^{pn}\right)^{\frac{1}{mn}}$

અહીં x અને y ઘનપૂર્ણાંક સંખ્યાઓ છે અને $m,n,$ અને p એ ઘન પૂર્ણાંકો છે.

આપણે આ નિયમોનો ઉદાહરણ દ્વારા સ્પષ્ટ કરીએ.

(i) $\sqrt[3]{3}\ \sqrt[3]{8}=3^{\frac{1}{3}}\times 8^{\frac{1}{3}}=(24)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{3\times 8}$

(ii) $\dfrac{(5)^{\frac{1}{3}}}{(9)^{\frac{1}{3}}}=\left(\dfrac{5}{9}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\dfrac{5}{9}}$

(iii) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{7}}=\sqrt[3]{7^{\frac{1}{2}}}=\left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=7^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{7}=\sqrt[2\times 3]{7}=\sqrt[2]{\sqrt[3]{7}}$

(iv) $\sqrt[5]{4^3}=\left(4^3\right)^{\frac{1}{5}}=4^{\frac{3}{5}}=4^{\frac{9}{15}}=\sqrt[15]{4^9}=\sqrt[3\times 5]{4^{3\times 3}}$

આમ આપણે જોઈએ છીએ કે કરણીના ન્યમોની ચકાસણી થઈ જાય છે.

અગત્યના મુદ્દા :

કરણીનો ઘાત કરણીના મૂલાંક અને મૂલાધારના મૂલાંકને એક સરખી ઘનપૂર્ણાંક સંખ્યા વડે ગુણવાથી બદલી શકાય છે,

$\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{4}$

અને $\sqrt[4]{3}=\sqrt[8]{3^2}=\sqrt[8]{9}$

2.12 સમરૂપ (અથવા સમાન) કરણી.

બે કરણીઓને તેમના સહગુણાંકોને ધ્યાનમાં લીધા સિવાય જો તેમને સમાન અસંમેય અવયવમાં પરિવર્તન કરી શકાય (ફેરવી શકાય) તો તે બે કરણી સમરૂપ અથવા સમાન છે એમ કહેવાય.

દાખલા તરીકે, $3\sqrt{5}$ અને $7\sqrt{5}$ સમરૂપ કરણી છે. ફરીથી વિચારો $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ અને $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ હવે $\sqrt{75}$ અને $\sqrt{12}$ ને $5\sqrt{3}$ અને $2\sqrt{3}$ ની જેમ દર્શાવ્યા છે આમ તેઓ સમરૂપ કરણી છે.

2.13 કરણીનું સરળતમ (અથવા સંક્ષિપ્ત) સ્વરૂપ :

કરણી એના સરળતમ સ્વરૂપમાં છએ તેમ કહેવાય, જો તે

અ. કરણીનો મૂલાંક શક્ય તેટલો લઘુત્તમ હોય,

બ. કરણી ચિહ્ન નીચે કોઈ અપૂર્ણાંક ન હોય,

ક. a^n સ્વરૂપનો કોઈ અવયવ ન હોય જ્યાં a ધનપૂર્ણાંક હોય અને n મૂલકના કરણી ચિહ્નની નીચે હોય,

ઉદાહરણ તરીકે , $\sqrt[3]{\frac{125}{18}} = \sqrt[3]{\frac{125 \times 12}{18 \times 12}} = \frac{5}{6}\sqrt[3]{12}$

ઉદાહરણ 2.10 નીચેના દરેકને અતિસંક્ષિપ્તરૂપની શુદ્ધ કરણીમાં દર્શાવો.

(i) $2\sqrt{7}$ (ii) $4\sqrt[4]{7}$ (iii) $\frac{3}{4}\sqrt{32}$

ઉકેલ :

(i) $2\sqrt{7} = \sqrt{2^2 \times 7} = \sqrt{4 \times 7} = \sqrt{28}$, જે શુધ્ધ કરણી છે.

(ii) $4\sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{4^4 \times 7} = \sqrt[4]{256 \times 7} = \sqrt[4]{1792}$, જે શુધ્ધ કરણી છે.

(iii) $\frac{3}{4}\sqrt{32} = \sqrt{32 \times \frac{9}{16}} = \sqrt{18}$, જે શુધ્ધ કરણી છે.

ઉદાહરણ 2.12 નીચેનાની અતિસંક્ષિપ્તરૂપની મિશ્ર કરણીમાં ફેરવો.

(i) $\sqrt{128}$ (ii) $\sqrt[6]{320}$ (iii) $\sqrt[3]{250}$

ઉકેલ :

(i) $\sqrt{128} = \sqrt{64 \times 2} = 8\sqrt{2}$, જે મિશ્ર કરણી છે.

(ii) $\sqrt[6]{320} = 6\sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5}$

નોંધ

$= \sqrt[6]{2^6 \times 5} = 2\sqrt[6]{5}$, જે મિશ્ર કરણી છે.

(iii) $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{5 \times 5 \times 5 \times 2} = 5\sqrt[3]{2}$, જે મિશ્ર કરણી છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 2.7

1. નીચેના પૈકી કઈ જોડી સમરૂપ કરણીની છે તે જણાવો.

   (i) $\sqrt{8}, \sqrt{32}$ (ii) $5\sqrt{3}, 6\sqrt{18}$ (iii) $\sqrt{20}, \sqrt{125}$

2. શુદ્ધ કરણી તરીકે દર્શાવો.

   (i) $7\sqrt{3}$ (ii) $3\sqrt[3]{16}$ (iii) $\frac{5}{8}\sqrt{24}$

3. અતિસંક્ષિપ્ત રૂપમાં મિશ્ર કરણી તરીકે દર્શાવો.

   (i) $\sqrt[3]{250}$ (ii) $\sqrt[3]{243}$ (iii) $\sqrt[4]{512}$

2.14 કરણી પરથી ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ

2.14.1 કરણીના સરવાળા અને બાદબાકી સંમેય સંખ્યાના સરવાળા અને બાદબાકીની જેમજ કરણીના સરવાળા અને બાદબાકી થઈ શકે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, $5\sqrt{3} + 17\sqrt{3} = (5+17)\sqrt{3} = 22\sqrt{3}$

અને $12\sqrt{5} - 7\sqrt{5} = [12-7]\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

કરણીના સરવાળા અને બાદબાકી માટે આપણે પ્રથમ તેમને સમરૂપ કરણીમાં ફેરવીએ છીએ અને પછી પ્રક્રિયાઓ કરીએ છીએ.

ઉદાહરણ તરીકે i) $\sqrt{50} + \sqrt{288}$

$= \sqrt{5 \times 5 \times 2} + \sqrt{12 \times 12 \times 2}$

$= 5\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = \sqrt{2}(5+12) = 17\sqrt{2}$

ii) $\sqrt{98} - \sqrt{18}$

$= \sqrt{7 \times 7 \times 2} - \sqrt{3 \times 3 \times 2}$

$= 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = (7-3)\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

ઉદાહરણ 2.22: *નીચેના દરેકનું સાદુરૂપ આપો.*

(i) $4\sqrt{6}+2\sqrt{54}$

(ii) $45\sqrt{6}-3\sqrt{216}$

ઉકેલ : (i) $4\sqrt{6}+2\sqrt{54}$

$= 4\sqrt{6}+2\sqrt{3\times3\times6}$

$= 4\sqrt{6}+6\sqrt{6}=10\sqrt{6}$

(ii) $45\sqrt{6}-3\sqrt{216}$

$= 45\sqrt{6}-3\sqrt{6\times6\times6}$

$= 45\sqrt{6}-18\sqrt{6}$

$= 27\sqrt{6}$

ઉદાહરણ 2.23: *સાબિત કરો કે-*

$$24\sqrt{45}-16\sqrt{20}+\sqrt{245}-47\sqrt{5}=0$$

ઉકેલ : $24\sqrt{45}-16\sqrt{20}+\sqrt{245}-47\sqrt{5}$

$= 24\sqrt{3\times3\times5}-16\sqrt{2\times2\times5}+\sqrt{7\times7\times5}-47\sqrt{5}$

$= 72\sqrt{5}-32\sqrt{5}+7\sqrt{5}-47\sqrt{5}$

$= \sqrt{5}[72-32+7-47]$

$= \sqrt{5}\times0=0=\text{R.H.S}$

ઉદાહરણ 2.24: *સાદુરૂપ આપો :* $2\sqrt[3]{16000}+8\sqrt[3]{128}-3\sqrt[3]{54}+\sqrt[4]{32}$

ઉકેલ : $2\sqrt[3]{16000}=2\sqrt[3]{10\times10\times10\times8\times2}=2\times10\times2\sqrt[3]{2}=40\sqrt[3]{2}$

$8\sqrt[3]{128}=8\sqrt[3]{4\times4\times4\times2}=32\sqrt[3]{2}$

$3\sqrt[3]{54}=3\sqrt[3]{3\times3\times3\times2}=9\sqrt[3]{2}$

$$\sqrt[4]{32} = 2\sqrt[4]{2}$$

જરૂરી પદાવલિ (અભિવ્યક્ત)

$$= 40\sqrt[3]{2} + 32\sqrt[3]{2} - 9\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{2}$$
$$= (40 + 32 - 9)\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{2}$$
$$= 63\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{2}$$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 2.8

નીચેનાનું સાદુરૂપ આપો.

1. $\sqrt{175} + \sqrt{112}$
2. $\sqrt{32} + \sqrt{200} + \sqrt{128}$
3. $3\sqrt{50} + 4\sqrt{18}$
4. $\sqrt{108} - \sqrt{75}$
5. $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} - 8\sqrt[3]{3}$
6. $6\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{16} + 4\sqrt[3]{128}$
7. $12\sqrt{18} + 6\sqrt{20} - 6\sqrt{147} + 3\sqrt{50} + 8\sqrt{45}$

2.14.2 કરણીમાં ગુણાકાર અને ભાગાકાર

બે કરણી જો એક સરખા ડાતની હોય, તો તેમનો ગુણાકાર અને ભાગાકાર થઈ શકે. આપણે જાણઈએ છીએ કે કરણીનો ઘાત મૂલક અને મૂલાધઆર ના ઘાતને એક સરખી ઘન સંખ્યા વડે ગુણીને કે ભફાગીને બદલી શકાય છે. ગુણાકાર કે ભાગાકાર કરતા રહેલા આપણએ તેમને સરખઆ ઘાતવાળી કરણીમાં બદલીએ છીએ.

આપણે કેટલાંક ઉહારહણ જોઈએ.

$\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{3 \times 2} = \sqrt{6}$ [$\sqrt{3}$ અને $\sqrt{2}$ બંને સરખા ઘાતવાળ 1 કરણી છે.]

$$\sqrt{12} \div \sqrt{2} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$$

ગુણાકાર કરીએ $\sqrt{3}$ x $\sqrt[3]{2}$

$$\sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{4}$$

$$\therefore \sqrt{3} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{27} \times \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{108}$$

ભાગાકાર કરતાં $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[6]{27}}{\sqrt[6]{4}} = \sqrt[6]{\dfrac{27}{4}}$

ચાલો આપણે એક ઉદાહરણ વિશે વિચારીએ :

ઉદાહરણ 2.25: (i) *ગુણાકાર કરો :* $5\sqrt[3]{16}$ *અને* $11\sqrt[3]{40}$.

(ii) *ભાગાકાર કરો :* $15\sqrt[3]{13}$ *હ્વઅ* $6\sqrt[6]{5}$.

ઉકેલ : (i) $5\sqrt[3]{16} \times 11\sqrt[3]{40}$

$$= 5 \times 11 \times \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 2} \times \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 5}$$

$$= 55 \times 2 \times 2\sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{5}$$

$$= 220\sqrt[3]{10}$$

(ii) $\dfrac{15\sqrt[3]{13}}{6\sqrt[6]{5}} = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{\sqrt[6]{13^2}}{\sqrt[6]{5}} = \dfrac{5}{2}\sqrt[6]{\dfrac{169}{5}}$

ઉદાહરણ 2.26: *સાદુરૂપ આપો અને પરિણામને સરળત્તમ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.*

$$2\sqrt{50} \times \sqrt{32} \times 2\sqrt{72}$$

ઉકેલ : $2\sqrt{50} = 2\sqrt{5 \times 5 \times 2} = 10\sqrt{2}$

$$\sqrt{32} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{72} = 2 \times 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

:- આપેલ પદાવલી

$$= 10\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} \times 12\sqrt{2}$$

$$= 960\sqrt{2}$$

નોંધ

2.15 કરણીની સરખામણી

બે કરણીની સરખામણી કરવા માટે પ્રથમ બંને કરણીઓને સમાન ઘાતવાળી કરણીમાં ફેરવો પછી સહ ગુણાંકો સાથેના મૂલાધારોને સરખાવો. આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 2.27: $\sqrt{\frac{1}{4}}$ કે $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ માંથી કઈ (કરણી) મોટી છે ?

ઉકેલ : $\sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \sqrt[6]{\frac{1}{64}}$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{\frac{1}{9}}$$

$$\frac{1}{9} > \frac{1}{64} \Rightarrow \sqrt[6]{\frac{1}{9}} > \sqrt[6]{\frac{1}{64}} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{3}} > \sqrt{\frac{1}{4}}$$

ઉદાહરણ 2.28: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$ અને $\sqrt[6]{5}$ ને ચડતા ક્રમમાં ગોઠવો.

ઉકેલ : 2,3 અને 6 નો લઘુત્તમ 6 છે.

$$\therefore \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{4}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$$

$$\sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{5}$$

હવે $\sqrt[6]{4} < \sqrt[6]{5} < \sqrt[6]{27}$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2} < \sqrt[6]{5} < \sqrt{3}$$

1. ગુણાકાર કરો $\sqrt[3]{32}$ અને $5\sqrt[3]{4}$.
2. ગુણાકાર કરો $\sqrt{3}$ અને $\sqrt[3]{5}$.
3. વડે ભાગો : $\sqrt[3]{135}$ ને $\sqrt[3]{5}$.
4. વડે ભાગો : $2\sqrt{24}$ ને $\sqrt[3]{320}$.

5. કઈ મોટી છે $\sqrt[4]{5}$ or $\sqrt[3]{4}$?

6. કઈ નાની છે $\sqrt[5]{10}$ or $\sqrt[4]{9}$?

7. ચડતા ક્રમમાં ગોઠવો.

   $\sqrt[3]{2},\ \sqrt[6]{3},\ \sqrt[3]{4}$

8. ઉતરતા ક્રમમાં ગોઠવો.

   $\sqrt[3]{2},\ \sqrt[4]{3},\ \sqrt[3]{4}$

2.16 કરણીનું સંમેયીકરણ :

નીચેના ગુણાકાર વિશે વિચારો :

(i) $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3$

(ii) $5^{\frac{7}{11}} \times 5^{\frac{4}{11}} = 5$

(iii) $7^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{3}{4}} = 7$

ઉપરના ત્રણ ગુણાકાર પૈકી દરેકમા આપણે જોઈએ છીએ કે બે કરણીના ગુણાકારથી આપણને સંમેય સંખ્યા મળે છે. આવા કિસ્સામાં દરેક કરણી અન્ય કરણીનો સંમયકારક અવયવ છે.

(i) $\sqrt{3}$ એ $\sqrt{3}$ નો સંમેયકારક અવયવ છે અને એનાથી ઉલટું પણ (એટલે કે $\sqrt{3}$ અને $\sqrt{3}$ એકબીજાના સંમેયકારક અવયવ છે.)

(ii) $\sqrt[11]{5^4}$ અને $\sqrt[11]{5^7}$ એકબીજાના સંમેયકારક અવયવ છે.

(iii) $\sqrt[4]{7}$ અને $\sqrt[4]{7^3}$ એકબીજાના સંમેયકારક અવયવ છે.

બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો કરણીને સંમેય સંખ્યામાં ફેરવવાની પ્રક્રિયાને સંમેયીકરણ કહે છે. અને બે સંખ્યાઓના ગુણાકારથી જો સંમેય સંખ્યા મળે તો એકબીજાના સંમેયકારક અવયવ કહેવાય.

ઉદાહરણ, તરીકે $\sqrt{x}$ નો સંમેયકારક અવયવ $\sqrt{x}$ છે અને $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ નો સંમેયકારક અવયવ $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ છે.

નોંધ :

(i) $x-\sqrt{y}$ અને $x+\sqrt{y}$ રાશીઓ અનુબધ્ધ કરણી કહેવાય છે. તેમનો સરવાળો અને ગુણાકાર હંમેશા સંમેય હોય છે.

(ii) સામાન્ય રીતે સંમેયીકરણ અસંમેય કરણીની અભિવ્યક્તિ ના છેદનું કરવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 2.29: $\sqrt{18}$ અને $\sqrt{12}$ ના સંમેયકારક અવયવ શોધો.

ઉકેલ : $\sqrt{18} = \sqrt{3\times3\times2} = 3\sqrt{2}$

સંમેયકારક અવયવ $\sqrt{2}$ છે.

$\sqrt{12} = \sqrt{2\times2\times3} = 2\sqrt{3}$.

સંમેયકારક અવયવ $\sqrt{3}$ છે.

ઉદાહરણ 2.30: $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

ઉકેલ : $$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2}{-3}$$

$$= -\frac{7+2\sqrt{10}}{3} = -\frac{7}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{10}$$

ઉદાહરણ 2.31: $\dfrac{4+3\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

ઉકેલ : $$\frac{4+3\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}} = \frac{\left(4+3\sqrt{5}\right)\left(4+3\sqrt{5}\right)}{\left(4-3\sqrt{5}\right)\left(4+3\sqrt{5}\right)}$$

$$= \frac{16+45+24\sqrt{5}}{16-45} = -\frac{61}{29}-\frac{24}{29}\sqrt{5}$$

ઉદાહરણ 2.32: $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

ઉકેલ : $$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1} = \frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-1}{\left[\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+1\right]\left[\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-1\right]}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2-1} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{4-2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{4-2\sqrt{6}} \times \frac{4+2\sqrt{6}}{4+2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}-4\sqrt{2}-4+6\sqrt{2}-4\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{16-24}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}-2-\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{4}$$

ઉદાહરણ 2.33: જો $\frac{3+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = a+b\sqrt{2}$, હોય, તો a અને b ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $\frac{3+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{3+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} \times \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{9+4+9\sqrt{2}}{9-2}$

$$= \frac{13+9\sqrt{2}}{7} = \frac{13}{7}+\frac{9}{7}\sqrt{2} = a+b\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{13}{7}, \qquad b = \frac{9}{7}$$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 2.10

1. નીચેના દરેક માટે સંમેયકારક અવયવ શોધો.

   (i) $\sqrt[3]{49}$ (ii) $\sqrt{2}+1$ (iii) $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{xy}$

2. નીચેના દરેકમાં છેદના સંમેયીકરણ દ્વારા સાદુરૂપ આપો.

   (i) $\frac{12}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{17}}$ (iii) $\frac{\sqrt{11}-\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{5}}$ (iv) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

3. સાદુરૂપ આપો : $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

4. $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

નોંધ

5. જો $a = 3+2\sqrt{2}$ હોય, તો $a+\frac{1}{a}$ શોધો.

6. જો $\frac{2+5\sqrt{7}}{2-5\sqrt{7}} = x+\sqrt{7}y$, તો x અને y શોધો.

સારાંશ

- $a \times a \times a \times$ ..... m વખત $= a^m$ એ ઘાતાંક સ્વરૂપે છે જ્યાં a એ પાયો અને m એ ઘાતાંક છે.
- ઘાતાંકના નિયમો :

  (i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (ii) a^m , $a^n = a^{m-n}$ (iii) $(ab)^m = a^m b^m$ (iv) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

  (v) $(a^m)^n = a^{mn}$ (vi) $a^o = 1$ (vii) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

. $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

- જો x સંમેય સંખ્યા હોય, તો અસંમેય સંખ્યા $\sqrt[n]{x}$ કરણી કહેવાય છે.
- $\sqrt[n]{x}$ માં n મૂલક કહેવાય છે અને x મૂલાધાર કહેવાય છે.
- (1 સિવાય) સહ ગુણાક સાથેની કરણી મિશ્ર કરણી કહેવાય છે.
- કરણીનો ઘાત એ મૂળ દર્શાવતી સંખ્યા છે.
- $\sqrt[n]{x}$ નો ઘાત n છે.
- કરણીના નિયમો (a > 0, b > 0)

  (i) $\left[\sqrt[n]{a}\right]^n = a$ (ii) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ (iii) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

- કરણી પરની પ્રક્રિયાઓ :

$$x^{\frac{1}{n}} \times y^{\frac{1}{n}} = (xy)^{\frac{1}{n}};\ \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{mn}} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}};\ \frac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}};\ \sqrt[m]{x^a} = \sqrt[mn]{x^{an}} \text{ or } \left(x^a\right)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{a}{m}} = x^{\frac{an}{mn}} = \left(x^{an}\right)^{\frac{1}{mn}}$$

- કરણીઓને જો સામાન્ય અસંમેય અવયવ હોય, તો તે સમરૂપ (સજાતીય) હોય છે.
- સજાતીય (સમરૂપ) કરણીના સરવાળા - બાદબાકી થઈ શકે છે.
- કરણીના ઘાત કરણીના મૂલકના ઘાત મૂલાધારના ઘાતને એકસરખી ઘન સંખ્યા વડે ગુણીને બદલી શકાય છે.
- એકસરખા ઘાતની કરણીઓના ગુણાકાર અને ભાગાકાર થઈ શકે છે.
- કરણીઓની સરખામણી કરવા માટે આપણે કરણીઓને સમનઘાત વાળી કરણીઓમાં ફેરવીએ છીએ પછી સહગુણક સાથેના મૂલઘારોની સરખામણી કરીએ છીએ.
- બે કરણીઓનો ગુણાકાર જો સંમેય સંખ્યા હોય, તો દરેકને એક બીજાનો સંમેયકારક અવયવ કહેવાય.
- $x+\sqrt{y}$ ને $x-\sqrt{y}$ નો સંમેય કારક અવયવ કહેવાય છે અવે તેનું પ્રતિપ. (એટલે કે $x+\sqrt{y}$ ને $x-\sqrt{y}$ નો સંમેયકારક અવયવ કહેવાય.)

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. નીચેના દરેકને ઘાતાંક સ્વરૂપે દર્શાવો.

   (i) $5 \times 3 \times 5 \times 3 \times 7 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9$

   (ii) $\left(\frac{-7}{9}\right)\times\left(\frac{-7}{9}\right)\times\left(\frac{-7}{9}\right)\times\left(\frac{-7}{9}\right)$

2. નીચેનાનું સાદુરૂપ આપો.

   (i) $\left(-\frac{5}{6}\right)^3 \times \left(\frac{7}{5}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^3$

   (ii) $\left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \frac{35}{27} \times \left(-\frac{1}{5}\right)^2$

3. સાદુરૂપ આપો અને પરિણામને ઘાતાંક સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

(i) $(10)^2 \times (6)^2 \times (5)^2$

(ii) $\left(-\frac{37}{19}\right)^{20} \div \left(-\frac{37}{19}\right)^{20}$

(iii) $\left[\left(\frac{3}{13}\right)^3\right]^5$

4. નીચેના દરેકનું સાદુરૂપ આપો.

(i) $3^o + 7^o + 37^o - 3$ (ii) $(7^o + 3^o)(7^o - 3^o)$

5. નીચેનાનું સાદુરૂપ આપો.

(i) $(32)^{12} \div (32)^{-6}$ (ii) $(111)^6 \times (111)^{-5}$ (iii) $\left(-\frac{2}{9}\right)^{-3} \times \left(-\frac{2}{9}\right)^5$

6. $\left(\frac{3}{7}\right)^{-3} \times \left(\frac{3}{7}\right)^{11} = \left(\frac{3}{7}\right)^x$ હોય, તો x નું મૂલ્ય શોધો.

7. $\left(\frac{3}{13}\right)^{-2} \times \left(\frac{3}{13}\right)^{-9} = \left(\frac{3}{13}\right)^{2x+1}$ હોય, તો x નું મૂલ્ય (કિંમત) શોધો.

8. અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે નીચેના દરેકના ઉત્તર ઘાતાંક સ્વરૂપે લખો.

(i) 6480000 (ii) 172872 (iii) 11863800

9. લબ્ધક નામનો (સૌથી વધુ તેજસ્વી) તારો પૃથ્વીથી લગભગ 8.1×10^{13} કિલોમીટર દૂર છે. ધારણા કરો કે પ્રાકશ 3.0×10^5 કિલોમિટર/સેકન્ડ ઝડપથી ગતિ કરે છે તો લુબ્ધક તારાથી પૃથ્વી પર પ્રકાશ પહોંચતા કેટલો સમય લાગે ?

10. નીચેના પૈકી કઈ કરણી છે તે જણાવો.

(i) $\sqrt{\frac{36}{289}}$ (ii) $\sqrt[9]{729}$ (iii) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+1}$ (iv) $\sqrt[4]{3125}$

11. શુધ્ધ કરણી તરીકે દર્શાવો.

(i) $3\sqrt[2]{3}$ (ii) $5\sqrt[3]{4}$ (iii) $5\sqrt[5]{2}$

12. સરળત્તમ સ્વરૂપમાં મિશ્ર કરણી તરીકે દર્શાવો.

(i) $\sqrt[4]{405}$ (ii) $\sqrt[5]{320}$ (iii) $\sqrt[3]{128}$

13. નીચેના પૈકી સમરૂપ (સજાતીય) કરણીઓની જોડ કઈ છે ?

(i) $\sqrt{112}, \sqrt{343}$ (ii) $\sqrt[3]{625}, \sqrt[3]{3125 \times 25}$ (iii) $\sqrt[6]{216}, \sqrt{250}$

14. નીચેના દરેકનું સાદુરૂપ આપો.

(i) $4\sqrt{48} - \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} + 6\sqrt{3}$

(ii) $\sqrt{63} + \sqrt{28} - \sqrt{175}$

(iii) $\sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50}$

15. કઈ કરણી મોટી છે ? અથવા કઈ કરણી નાની છે ?

(i) $\sqrt{2}$ or $\sqrt[3]{3}$ (ii) $\sqrt[3]{6}$ or $\sqrt[4]{8}$

16. ઉતરતા ક્રમમાં ગોઠવો.

(i) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}$ (ii) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{4}$

17. ચડતા ક્રમમાં ગોઠવો.

$\sqrt[3]{16}, \sqrt{12}, \sqrt[6]{320}$

18. છેદનું સંમેયીકરણ કરીને સાદુરૂપ આપો.

(i) $\frac{3}{\sqrt{6} - \sqrt{7}}$ (ii) $\frac{12}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$ (iii) $\frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2}$

19. છેદનું સંમેયીકરણ કરીને નીચેનામાંના દરેકનું સાદુરૂપ આપો.

(i) $\frac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5} - \sqrt{12}}$

20. જો $\frac{5 + 2\sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}} = a + b\sqrt{3}$, હોય, તો a અને b નું મૂલ્ય શોધો. (a અને b સંમેય સંખ્યાઓ છે.)

નોંધ

21. જો $x = 7+4\sqrt{3}$, તો $x+\frac{1}{x}$ નું મૂલ્ય શોધો.

તમારી પ્રતિ ચકાસોના ઉત્તરો

2.1

1. (i) $(-7)^4$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$ (iii) $\left(\frac{-5}{7}\right)^{20}$

2.

	આધાર	ઘાતાંક
(i)	-3	5
(ii)	7	4
(iii)	$-\frac{2}{11}$	8

3. (i) $\frac{81}{2401}$ (ii) $\frac{16}{6561}$ (iii) $-\frac{27}{64}$

4. (i) $\frac{3}{7}$ (ii) $\frac{625}{324}$

5. (i) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$ (ii) $\left(-\frac{1}{7}\right)^4$ (iii) $\left(-\frac{5}{3}\right)^4$

2.2

1. (i) $3^1 \times 11^1 \times 13^1$ (ii) $2^3 \times 3^4$ (iii) $2^3 \times 3^3 \times 7^1$

2. (i) 3^6 (ii) 2^9 (iii) $2^5 \times 3^4$

   (iv) $\frac{11^3}{2^{12}}$ (v) $\frac{(-7)^3}{2^5}$

2.3

1. (i) $(7)^5$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ (iii) $\left(-\frac{7}{8}\right)^6$

2. (i) $(-7)^2$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^6$ (iii) $\left(-\frac{7}{8}\right)^{15}$

3. (i) 2^{18} (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^6$ (iii) $\left(-\frac{5}{9}\right)^{15}$

(iv) $\left(\frac{11}{3}\right)^5$ (v) $\left(-\frac{7}{11}\right)^3$

4. *સાચાં :* (i), (ii), (vii)

ખોટા : (iii), (iv), (v), (vi)

2.4

1. $\frac{49}{9}$

2. (i) $\left(\frac{7}{3}\right)^4$ (ii) 12^2 (iii) $\left(\frac{13}{3}\right)^{12}$

3. (i) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-4}$ (ii) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-10}$ (iii) $\left(-\frac{4}{3}\right)^{-10}$

4. (i) $\frac{81}{16}$ (ii) $-\frac{2}{3}$ (iii) $-\frac{343}{125}$

5. *સાચા :* (ii), (iii), (iÃk)

2.5

1. (i) 8 (ii) $\frac{25}{9}$

2. (i) 1 (ii) $\frac{7}{8}$ (iii) $\frac{13}{16}$

2.6

1. (i) 4, 64 (ii) 6, 343 (iii) 2, 119

2. (iii), (iv)

3. શુધ્ધ : (i), (iv)

મિશ્ર : (ii), (iii)

2.7

1. (i), (iii)

2. (i) $\sqrt{147}$ (ii) $\sqrt[3]{432}$ (iii) $\sqrt{\frac{75}{8}}$

3. (i) $5\sqrt[3]{2}$ (ii) $3\sqrt[3]{9}$ (iii) $4\sqrt[4]{2}$

2.8

1. $9\sqrt{7}$ 2. $22\sqrt{2}$ 3. $27\sqrt{2}$ 4. $\sqrt{3}$

5. $-3\sqrt{3}$ 6. $30\sqrt[3]{2}$ 7. $51\sqrt{2}+36\sqrt{5}-42\sqrt{3}$

2.9

1. $20\sqrt[3]{2}$ 2. $3\sqrt[3]{5}$ 3. 3 4. $\sqrt[6]{\frac{216}{25}}$

5. $\sqrt[3]{4}$ 6. $\sqrt[4]{9}$ 7. $\sqrt[6]{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ 8. $\sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[3]{2}$

2.10

1. (i) $\sqrt[3]{7}$ (ii) $\sqrt{2}-1$ (iii) $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$

2. (i) $\frac{12}{5}\sqrt{5}$ (ii) $\frac{2\sqrt{51}}{17}$ (iii) $\frac{8}{3}-\frac{\sqrt{55}}{3}$ (iÃk) $2+\sqrt{3}$

3. 14

4. $-\frac{1}{4}\left[2+\sqrt{6}+\sqrt{2}\right]$

5. 6

6. $-\frac{179}{171}-\frac{20\sqrt{7}}{171}$

સત્રાંત સ્વાધ્યાયના ઉત્તરો

1. (i) $5^2 \times 3^2 \times 7^3 \times 9^2$ (ii) $\left(-\frac{7}{9}\right)^4$

2. (i) $-\frac{5}{56}$ (ii) $\frac{1}{105}$

3. (i) $2^4 \times 3^2 \times 5^4$ (ii) 1 (iii) $\left(\frac{3}{13}\right)^{15}$

4. (i) શૂન્ય (ii) શૂન્ય

5. (i) $(32)^{18}$ (ii) 111 (iii) $\left(\frac{2}{9}\right)^2$

6. $x = 8$

7. $x = -6$

8. $2^7 \times 3^4 \times 5^4$

9. $3^3 \times 10^7$ સેકન્ડ

10. (ii), (iii), (iÃk)

11. (i) $\sqrt[2]{27}$ (ii) $\sqrt[3]{500}$ (iii) $\sqrt[5]{6250}$

12. (i) $3\sqrt[4]{5}$ (ii) $2\sqrt[5]{10}$ (iii) $4\sqrt[3]{2}$

13. (i), (ii)

14. (i) $\frac{127}{6}\sqrt{3}$ (ii) zero (iii) $5\sqrt{2}$

15. (i) $\sqrt[3]{3}$ (ii) $\sqrt[3]{6}$

16. (i) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}$ (ii) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt{2}$

17. $\sqrt[3]{16}, \sqrt[6]{320}, \sqrt{12}$

18. (i) $-3\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)$ (ii) $3\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)$ (ii) $9-4\sqrt{5}$

19. (i) $\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ (ii) $\frac{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}+2\sqrt{105}}{70}$

20. a = 11, b = –6

21. 14