14

ત્રિકોણની સમરૂપતા

14.1 પરિચય

આસપાસ તમે એવી ઘણી વસ્તુઓ જોશો, જે એક જ આકારની , પરંતુ તે જે અથવા જુદાં જુદાં કદની હોય. ઉદાહરણાર્થ, વૃક્ષનાં પાન લગભગ તે આકાર, પરંતુ એક જ અથવા વિવિધ કદ ધરાવે છે. તે જ પ્રમાણે, એક જ નેગેટિગમાંથી વિકસાવેલા વિવિધ કદના ફોટોગ્રાફ તે જ આકાર પણ વિવિધ કદ ધરાવે છે. મકાનનું નાનું મોડેલ અને મકાન પોતે એક જ આકારનાં છે, પણ વિવિધ કદનાં છે. આવી તમામ વસ્તુઓ જેમને તે જ આકાર પરંતુ વિવિધ કદ છે તે સમરૂપ વસ્તુઓ કહેવાય છે.

આપણે સમતલીય આકૃતિઓની સમરૂપતા તપાસીએ :

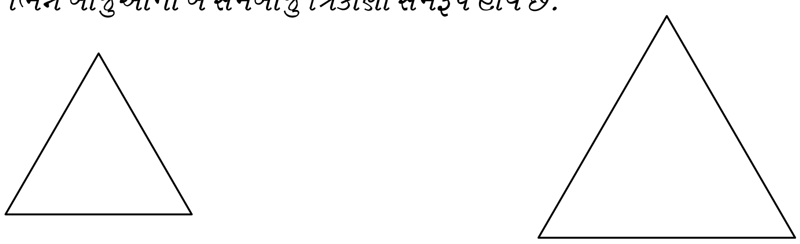
(1) સમાન લંબાઈના બે રેખાખંડ એકરૂપ હોય છે, પણ વિવિધ લંબાઈના રેખાખંડ સમરૂપ હોય છે.

આકૃતિ. 14.1 (i)

(2) સમાન ત્રિજ્યાનાં બે વર્તુળો એકરૂપ હોય છે, પણ જુદી જુદી ત્રિજ્યાનાં વર્તુળો સમરૂપ હોય છે.

આકૃતિ. 14.1 (ii)

(3) ભિન્ન બાજુઓના બે સમબાજુ ત્રિકોણો સમરૂપ હોય છે.



આકૃતિ. 14.1 (iii)

(4) ભિન્ન બાજુઓવાળા બે ચોરસ સમરૂપ હોય છે.

આકૃતિ. 14.1 (iv)

આ પ્રકરણમાં, આપણે સમરૂપતાની સંકલ્પના, ખાસ કરીને ત્રિકોણોની સમરૂપતા અને તે માટેની શરતો વિશે શીખીશું. આપણે તેમને સંબંધિક જુદા જુદા પરિણામો વિશે પણ શીખીશું.

હેતુઓ

આ પાઠ શીખ્યા પછી, આધ્યેતા :

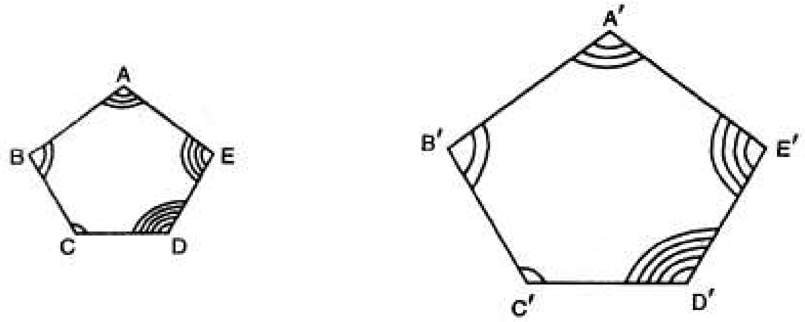
- *સમરૂપ આકૃતિઓ ઓળખી શકશો.*
- *એકરૂપ અને સમરૂપ સમતલીય આકૃતિઓ વચ્ચે ભેદ પારખી શકશો.*
- *ત્રિકોણોની સમરૂપતા માટેની શરતો જણાવી શકશે, જેમ કે AAA, SSS અને SAS.*
- *સમરૂપતા પર આધારિત અભ્યાસક્રમમાં આપેલ અજ્ઞાત (અતારાકિત) પરિણામો પ્રયોગાત્મક ચકાસી શકશે અને તેમનો ઉપયોગ કરી શકશે.*
- *બૌધાયન/પાયથોગોરસ પ્રમેય સાબિત કરી શકશે.*
- *સમરૂપ ત્રિકોણો પર આધારિત કૂટપ્રશ્નોને પ્રયોગાત્મક રીતે ચકાસવામાં (અથવા તાર્કિક રીતે સાબિત કરવામાં) આ પરિણામોનું ઉપયોજન કરી શકશે.*

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

નીચેનાનું જ્ઞાન,

- *સમતલીય આકૃતિઓ જેવી કે ત્રિકોણ, ચતુષ્કોણ, વર્તુળ, લંબચોરસ, ચોરસ વગેરે.*
- *ત્રિકોણોની એકરૂપતાની શરતો*
- *સંખ્યાઓના વર્ગ અને વર્ગમૂળ શોધવા.*
- *ગુણોત્તર અને પ્રમાણ*
- *ત્રિકોણના અંદરના ખૂણાઓ અને બાહ્ય ખૂણાઓ*

14.1 સમરૂપ સમતલીય આકૃતિઓ



આકૃતિ. 14.2

આકૃતિ 14.2 માં, બે પંચકોણ એક જ આકારના દેખાય છે.

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$ and $\angle E = E'$ છે

અને $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$. છે તેથી કહી શકીએ કે બે પંચકોણ સમરૂપ છે. આમ, આપણે કહીશુ કે,

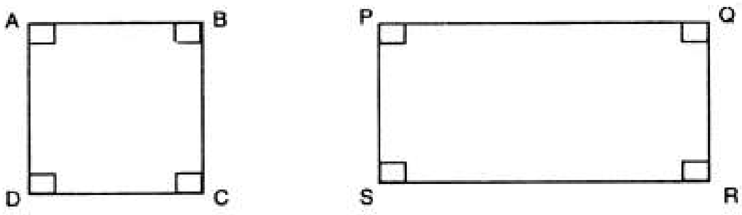
કોઈ બે બહુકોણના અનુરૂપ ખૂણા સમાન હોય અને અનુરૂપ બાજુઓ પ્રમાણમાં હોય તો તે સમરૂપ હોય છે.

આમ, બે બહુકોણ સમરૂપ હોય, જો તેઓ નીચેની બે શરતોનું સમાધાન કરે -

(1) અનુરૂપ ખૂણા માન હોય

(2) અનુરૂપ બાજુઓ પ્રમાણાં હોય

આમાંની એક પણ શરત ન પળાય, તો બહુકોણ સમરૂપ ન બને, જેમ કે આકૃતિ 14.3 માં લંબચોરસ અને ચોરસના કિસ્સામાં જુઓ કે તમામ અનુરૂપ ખૂણા સમાન છે પણ અનુરૂપ બાજુઓ પ્રમાણમાં નથી.

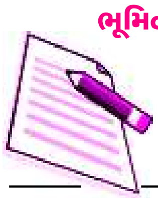


આકૃતિ. 14.3

14.2 મૂળભૂત પ્રમાણ પ્રમેય

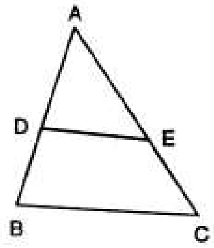
આપણે મૂળભૂત પ્રમાણ નીચે મુજબ જણાવીએ :

જો એક રેખા ત્રિકોણની એક બાજુને સમાંતર દોરવામાં આવે,તો ત્રિકોણની બીજી બે બાજુઓ પ્રમાણમાં વિભાગીય છે.



આમ, આકૃતિ 14.4 માં, DE || BC, ઉપરના પરિણામ પ્રમાણે,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



આકૃતિ. 14.4

આપણે AD, DB, AE અને EC. માપીને આ સરળતાથી ચકાસી શકીશું

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ થાય છે.}$$

આપણે ઉપરના પરિણામોનું પ્રતિપ્રમેય નીચે પ્રમાણે જણાવીએ :

જો કોઈ રેખા ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓને સમ પ્રમાણમાં વિભાગે, તો તે રેખા ત્રિકોણની ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે.

આમ, આકૃતિ14.4 માં જો DE, ΔABC ની બાજુઓ AB અને AC ને આવી રીતે વિભાગે,

જેથી, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ તો DE || BC

આપણે ∠ADE અને ∠ABC માપીને અને ∠ADE = ∠ABC શોધીને આને ચકાસી શકીશું. આ અનુકોણ હોઈ, રેખા DE અને BC સમાંતર છે.

આપણે વિવિધ ત્રિકોણો લઈ ઉપરનાં બે પરિણામો ચકાસી શકીએ.

આના પર આધારિત કેટલાંક ઉદાહરણ ઉકેલીએ.

ઉદાહરણ 14.1: આકૃતિ 14.5 માં, DE || BC જો AD = 3 સેમી, DB = 5 સેમી અને AE = 6 સેમી, તો AC શોધો.

ઉકેલ: DE || BC (આપેલ છે) ધારો કે EC = x

$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

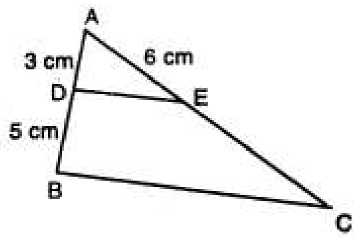
$\therefore \quad \frac{3}{5} = \frac{6}{x}$

➡ $3x = 30$

➡ $x = 10$

$\therefore$ EC = 10 સેમી

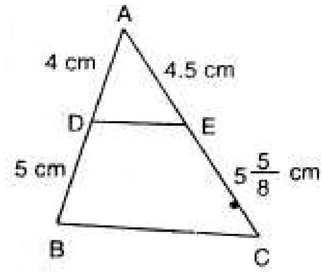
$\therefore$ AC = AE + EC = 16 સેમી



આકૃતિ. ૧૪.૫

ઉદાહરણ 14.2: આકૃતિ. 14.6માં, AD = 4 સેમી, DB = 5 સેમી, AE = 4.5 સેમી અને EC = $5\frac{5}{8}$ સેમી, DE || BC છે ? તમારા જવાબ માટે કારણ આપો

ઉકેલ: આપેલ છે કે AD = 4 સેમી અને DB = 5 સેમી



આકૃતિ. 14.6

$$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{4}{5}$$

તે જ પ્રમાણે, $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{4.5}{\frac{45}{8}} = \dfrac{9}{2} \times \dfrac{8}{45} = \dfrac{4}{5}$

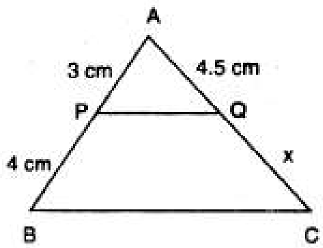
$$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

મૂળભૂત પ્રમાણ પ્રમેયના પ્રતિપ્રમેય પ્રમાણે

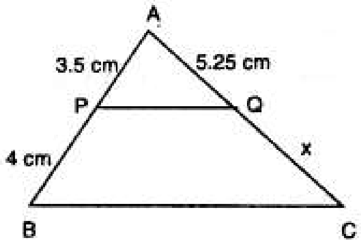
DE || BC

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 14.1

1. આકૃતિ 14.7 (i) અને (ii) માં, PQ || BC દરેક કિસ્સામાં x ની કિંમત શોધો.



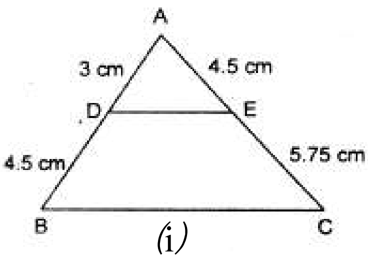
(i)



(ii)

આકૃતિ. 14.7

2. આકૃતિ 14.8 (i) અને (ii) માં, DE, BC ને સમાંતર છે કે નહીં તે શોધો. તમારા જવાબ માટે કારણો આપો.



(i)

આકૃતિ. 14.8

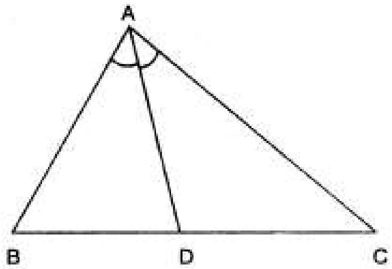
14.6 ત્રિકોણના ખૂણાવો દ્વિભાજક

આપણે હવે અગત્યનું પરિણામ નીચે મુજબ જણાવીએ :

ત્રિકોણની આંદરના ખૂણાનો દ્વિભાજક સામેની બાજુને ખૂણો ધરાવતી બાજુઓના પ્રમાણમાં વિભાગે છે.

આમ, ઉપરના પરિણામ પ્રમાણે, જો AD અને Δ ABC ના $\angle$A ને અત:દ્વિભાજક હોય, તો

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$



આપણે BD, DC, AB અને AD માપીને અને ગુણોત્તર શોધીને આ સરળતાથી ચકાસી શકીશું. આપણને જોવા મળશે કે,

આકૃતિ. 14.9

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$ થાય છે.

બીજા ત્રિકોણ સાથે આ પ્રવૃત્તિ ફરીથી કરતાં, આપણે પરિણામ ચકાસીશું.

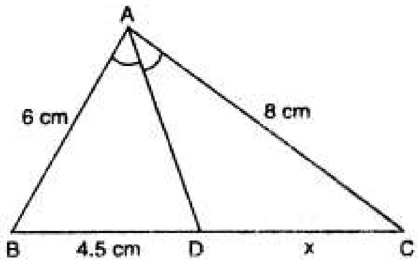
આપણે આ દર્શાવવા કેટલાંક ઉદાહરણ ઉકેલીએ.

ઉદાહરણ 14.3: ત્રિકોણની બાજુઓ AB અને AC અનુક્રમે 6 સેમી અને 8 સેમી છે. $\angle$A નો દ્વિભાજક AD સામેની બાજુ BC ને D માં છેદે છે જેથી BD = 4.5 સેમી રેખાખંડ CD ની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ: ઉપરના પરિણામ પ્રમાણે, આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

($\because$ AD એ ΔABC ના $\angle$ A નો અંતઃદ્વિભાજક છે



અથવા

➡ $6x = 4.5 \times 8$

$\therefore$ $x = 6$

આકૃતિ. 14.10

અર્થાત્ રેખાખંડ CD ની લંબાઈ = 6 સેમી હોય.

ઉદાહરણ 14.4: ત્રિકોણની બાજુઓ 28 સેમી, 36 સેમી, અને 48 સેમી છે. સૌથી નાની બાજુ તેની સામેના ખૂણાન દ્વિભાજકથી જે રેખાખંડોમાં વિભાગીય છે તેમની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ: નાનામાં નાની બાજુ 28 સેમી લંબાઈની છે અને તેની સામેનો ખૂણો A રચતી બાજુઓ 36 સેમી અને 48 સેમી છે. $\angle$ A નો કોણ દ્વિભાજક AD, BC ને D માં મળે છે.

$\therefore \quad \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{36}{48} = \dfrac{3}{4}$

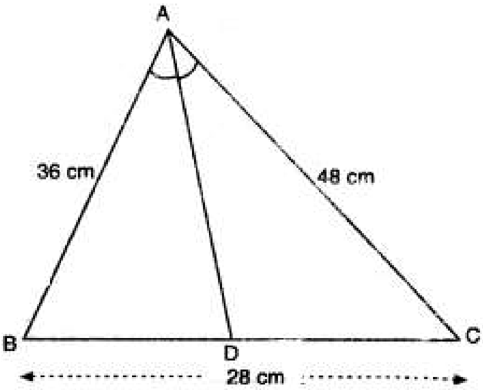
$\Rightarrow$ $4BD = 3DC$ અથવા $BD = \dfrac{3}{4}DC$

$BC = BD + DC = 28$ સેમી

$\therefore \quad DC + \dfrac{3}{4}DC = 28$

$\therefore \quad DC = \left(28 \times \dfrac{4}{7}\right)$ સેમી $= 16$ સેમી

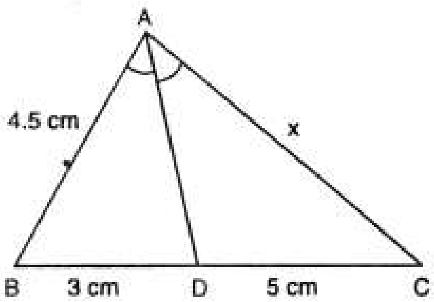
$\therefore \quad BD = 12$ સેમી અને $DC = 16$ સેમી



આકૃતિ. 14.11

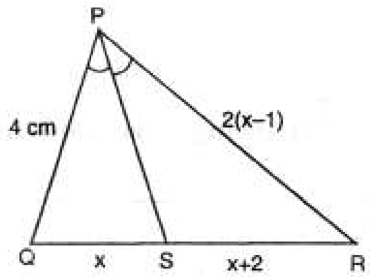
તમારી પ્રગતિ ચકાસો 14.2

1. આકૃતિ 14.12 માં AD, $\angle A$ નો દ્વિભાજક છે, જે BC ને D માં મળે છે. જો $AB = 4.5$ સેમી BD $= 3$ સેમી, $DC = 5$ સેમી, તો x શોધો.



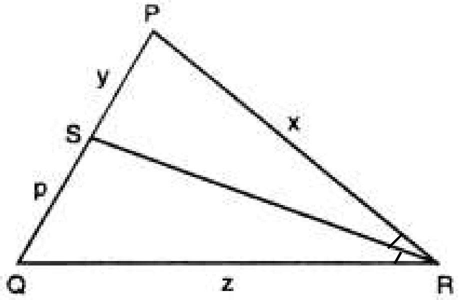
આકૃતિ. 14.12

2. આકૃતિ 14.13 માં PS એ ΔPQR ના $\angle P$ નો અંત:દ્વિભાજક છે. કેટલીક બાજુઓનાં માપ આકૃતિ 14.13 માં આપેલ છે. x શોધો.



આકૃતિ. 14.13

3. આકૃતિ 14.14 માં RS એ ΔPQR ના $\angle R$ નો અંતઃદુભાજક છે. આપેલ પરિણામ માટે QS ની લંબાઈને x, y અને z માં અભિવ્યક્ત કરો.



આકૃતિ. 14.14

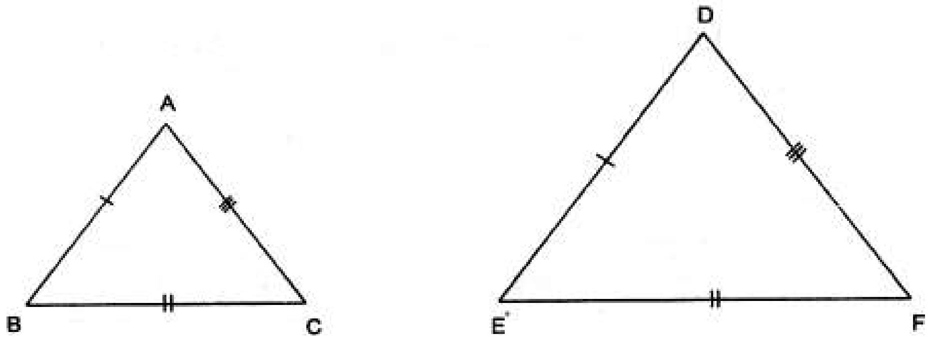
14.4 ત્રિકોણની સમરૂપતત્ર

ત્રિકોણો એ વિશિષ્ટ પ્રકારના બહુકોણ છે અને તેથી બહુકોણોની સમરૂપતાની શરતો ત્રિકોણોને પણ લાગુ પડે છે. આમ,

બે ત્રિકોણો સમરૂપ હોય, જો

(1) તેમના અનુરૂપ ખૂણા સમાન હોય, અને

(2) તેમની અનુરૂપ બાજુઓ પ્રમાણમાં હોય.



આકૃતિ. 14.15

આપણે કહીએ છીએ કે ΔABC ,ΔDEF ને સમરૂપ છે અને તે નીચે લખીને દર્શાવીએ છીએ :

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

સંકેત '~' 'સમરૂપ છે' એ માટે છે.

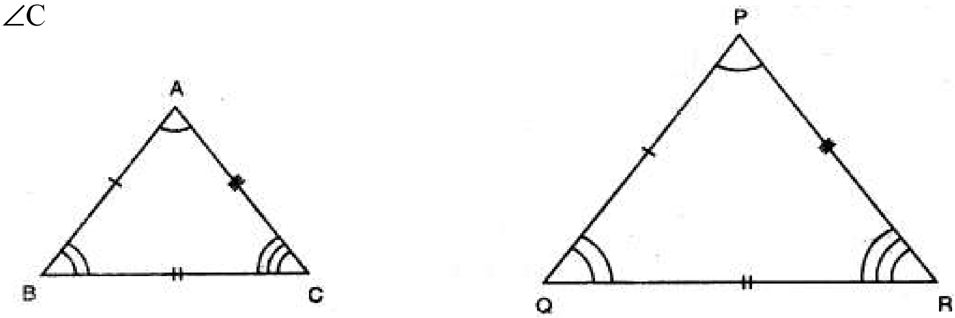
જો $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ તો વ્યાખ્યા દ્વારા

$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ and $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$.

14.4.1 સમરૂપતાની શરત - ખૂખૂખૂ

આપણે દર્શાવીશું કે જો ઉપરની બે શરતો પૈકીની એકનું સમાધાન થતું હોય, તો બીજી પોતાની મેળે ત્રિકોણોની બાબતમાં લાગુ પડે છે. ચલો આપણે નીચેનો પ્રયોગ કરીએ :

આકૃતિ 14.16 માં દર્શાવ્યા મુજબ બે ABC અને PQR રચો, જેમાં $\angle P = \angle A$, $\angle Q = \angle B$ *અને* $\angle R = \angle C$



આકૃતિ. 14.16

DABC *ની બાજુઓ* AB, BC *અને* CA *માપો અને* DPQR *ની બાજુઓ* PQ, QR *અને* RP *પણ માપો.*

હવે ગુણોત્તર શોધો : $\frac{AB}{PQ}, \frac{BC}{QR}$ *અને* $\frac{CA}{RP}$.

તમે શું શોધ્યું ? તમે જોશો કે તમામ ત્રણ ગુણોત્તર સમાન છે અને તેથી ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

સમાન અનુરૂપ ખૂણાઓવાળા જુદા જુદા ત્રિકોણો સાથે આની અજમાયશ કરો. તેમને તે જ પરિણામ મળશે.

આમ, આપણે કહી શકીએ કે :

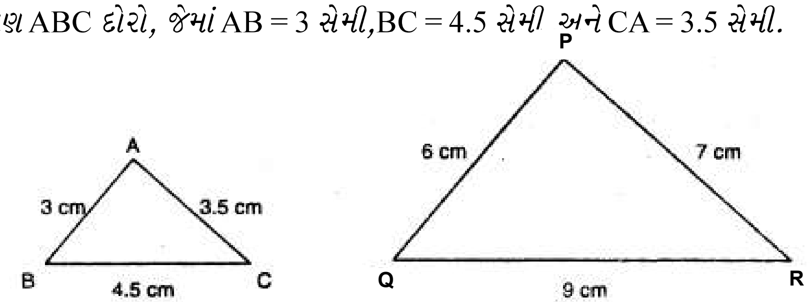
જો બે ત્રિકોણોમાં અનુરૂપ ખૂણા સમાન હોય, તો ત્રિકોણો સમરૂપ હોય છે.

સમરૂપતાની આ શરત ખૂખૂખૂ કહેવાય છે.

14.4.2 સમરૂપતાની શરત ખૂખૂખૂ કહેવાય છે.

હવે આપણે નીચેનો પ્રયોગ કરીએ.

ત્રિકોણ ABC દોરો, જેમાં AB = 3 સેમી, BC = 4.5 સેમી અને CA = 3.5 સેમી.



(i) (ii)

આકૃતિ. 14.17

આકૃતિ 14.17 (ii) માં દર્શાવ્યા મુજબ બીજો DPQR દોરો.

આપણે જોઈ શકીએ કે $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ થાય છે.

અર્થાત્, બે ત્રિકોણોની બાજુઓ પ્રમાણમાં છે.

હવે ΔABC ના $\angle A$, $\angle B$ અને $\angle C$ માપો ΔPQR ના $\angle P$, $\angle Q$ અને $\angle R$ માપો.

તમે જોશો કે $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ અને $\angle C = \angle R$ થાય છે.

અનુરૂપ બાજુઓ પ્રમાણમાં હોય તેવા બીજા બે ત્રિકણો સાથે આ પ્રયોગ ફરીથી કરો ; તમે જોશો કે્ નુરૂપ ખૂણા સમાન છે અને તેથી ત્રિકોણો સમરૂપ છે.

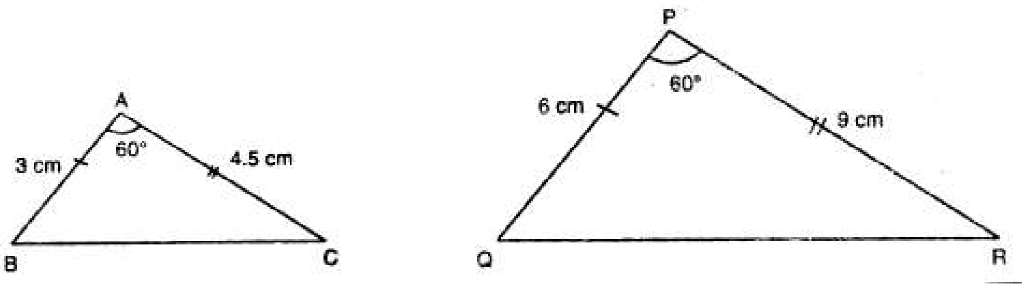
આમ, આપણે કહી શકીએ કે,

જો બે ત્રિકોણોની અનુરૂપ બાજુઓ પ્રમાણમાં હોય, તો ત્રિકોણો સમરૂપ હોય છે.

14.4.3 સમરૂપતાની શરત - બાખૂબા

ચાલો આપણે નીચેનો પ્રયોગ કરીએ :

રેખાખંડ AB = 3 સેમી લો અને A આગળ 60^0 નો ખૂણો રચો. AC = 4.5 સેમી કાપો. BC જોડો.



આકૃતિ. 14.18

હવે PQ = 6 સેમી લો. P બિંદુએ 60^0 નો ખૂણો રચ અને PR = 9 સેમી કાપો (આકૃતિ 14.18) QR જોડો $\angle B$, $\angle C$, $\angle Q$ અને $\angle R$ માપો. આપણે જોઈશુ કે $\angle B = \angle Q$ અને $\angle C = \angle R$ થાય છે.

આમ, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

આમ આપણે તારવીએ કે

જો એક ત્રિકોણનો એક ખૂણો બીજા ત્રિકોણના એક ખૂણા બરાબર હોય અને આ ખૂણાઓ ધરાવતી બાજુઓ પ્રમાણમાં હોય, તો ત્રિકોણો સમરૂપ હોય છે.

આમ, આપણને ત્રિકોણોની સમરૂપતા માટે આપણને ત્રણ મહત્વન શરતો મળે છે. તે નીચે આપેલ છે :

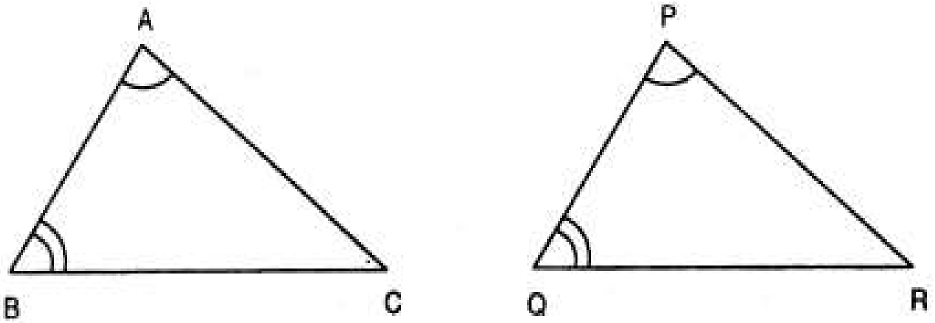
(1) જો બે ત્રિકોણોમાં અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય, તો ત્રિકોણો સમરૂપ હોય છે.

(2) જો બે ત્રિકોણોની અનુરૂપ બાજુઓ પ્રમાણમાં હોય, તો ત્રિકોણો સમરૂપ હોય છે.

(3) જો ત્રિકોણનો એક ખૂણો બીજા ત્રિકોણના એક ખૂણા બરાબર હોય અને આ ખૂણા ધરાવતી બાજુઓ પ્રમાણમાં હોય, તો ત્રિકોણો એકરૂપ હોય છે.

ઉદાહરણ 14.5: *આકૃતિ 14.19 માં બે ત્રિકોણો ABC અને PQR આપેલ છે.*

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$?.



આકૃતિ. 14.19

ઉકેલ: *આપેલ છે કે*

$\angle A = \angle P$ અને $\angle B = \angle Q$

આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે :

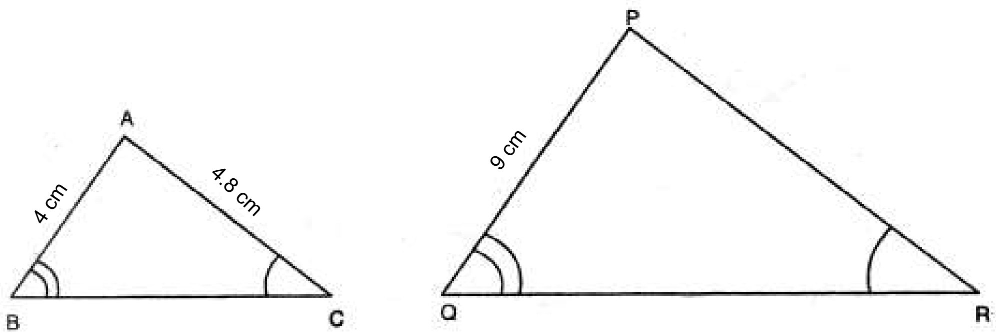
$\angle A + \angle B + \angle C = \angle P + \angle Q + \angle R = 180^o$

$\angle C = \angle R$

આમ, સમરૂપતાની પ્રથમ શરતખૂખૂખૂ મુજબ,

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$

ઉદાહરણ 14.6: *આકૃતિ 14.20 માં,* $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ *જો* AC = 4.8 *સેમી,* AB = 4 *સેમી, અને* PO = 9 *સેમી. તો* PR *શોધો.*



આકૃતિ. 14.20

ઉકેલ: *આપેલ છે કે* $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$$\therefore \qquad \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$$

ધારો કે PR = x સેમી

$$\therefore \qquad \frac{4}{9} = \frac{4.8}{x}$$

➡ $\quad 4x = 9 \times 4.8$

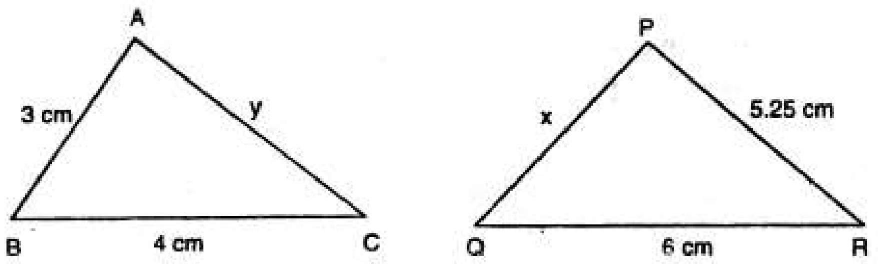
➡ $\quad x = 10.8$

અર્થાત્, PR = 10.8 સેમી.

14.3 તમારી પ્રગતિ ચકાસો

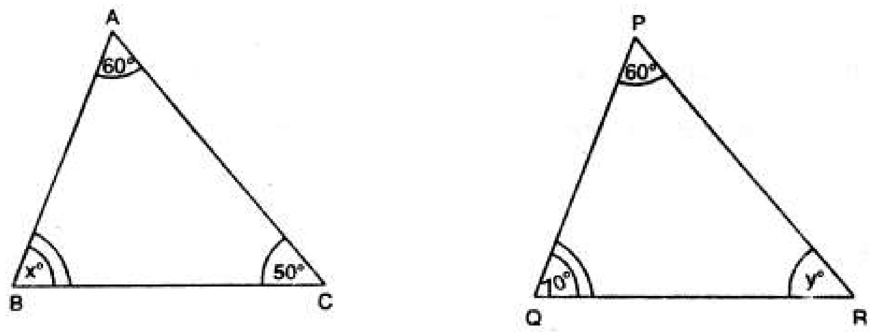
જો $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ તો x અને y ની કિંમત શોધો.

(i)



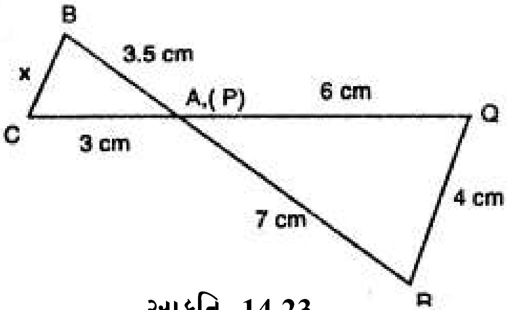
આકૃતિ. 14.21

(ii)



આકૃતિ. 14.22

(iii)



આકૃતિ. 14.23

14.8 કેટલાંક વધુ અગત્યના પરિણામો

હવે આપણે કાટકોણ ત્રિકોણ અને કાટકોણના શિરોબિંદુમાંથી, સામેની બાજુને લંબના સંબંધમાં સમરૂપતા પરના બીજા અગત્યનાં પરિણામ વિશે શીખીએ. આપણે પરિણામને નીચે મુજબ કહીએ અને તેને ચકાસવા પ્રયત્ન કરીએ.

જો કાટકોણ ત્રિકણમાં કાટખૂણાના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણને લંબ દોરવામાં આવે તો લંબની બાજુના ત્રિકોણો એકબીજાને તેમજ મૂળ ત્રિકોણને સમરૂપ છે.

પ્રવૃત્તિ દ્વારા આપણે આ ચકાસવા પ્રયત્ન કરીએ.

A *આગળ કાટકોણ હોય તેવો* ΔABC *દોરો.*

$AD \perp$ *કર્ણ* BC *દોરો, જે તેને* D *માં મળે છે.*

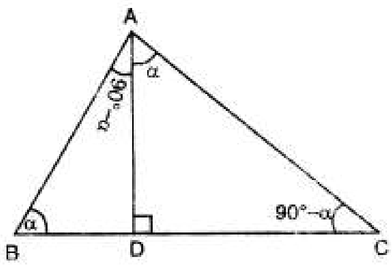
ધારો કે, $\angle DBA = a$, $\angle ADB = 90^\circ$ *હોઈ,*

$\angle BAD = 90^\circ - a$ *થાય.*

$\angle BAC = 90^\circ$ *અને* $\angle BAD = 90^\circ - a$ *હોઈ.*

તેથી $\angle DAC = a$ *થાય.*

તે જ પ્રમાણે $\angle DCA = 90^\circ - a$



આકૃતિ. 14.24

$\therefore$ ΔADB *અને* ΔCDA *સમરૂપ છે, કારણ કે તેના તમામ અનુરૂપ ખૂણા સમાન છે.*

વળી, DBAC *ના ખૂણા*B, A , *અને* C *અનુક્રમે* α 90^0 *અને* $90^0 - \alpha$ *છે.*

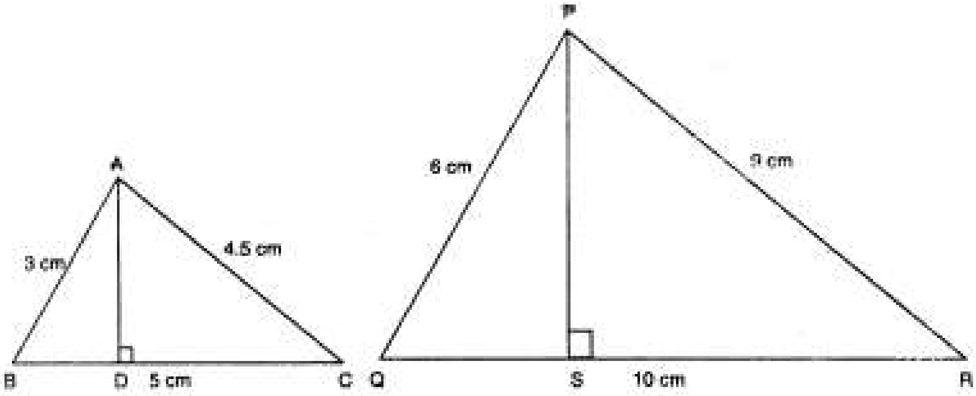
$\therefore \quad \Delta ADB \sim \Delta CDA \sim \Delta CAB$

બીજું અગત્યનું પરિણામ સમરૂપ ત્રિકોણોની બાજુઓ અને ક્ષેત્રફળ વચ્ચેના સંબંધ વિશે છે.

તે કહી છે કે :

સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર અનુરૂપ બાજુઓના વર્ગોના ગુણોત્તર બરાબર છે.

આ પરિણામ આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ દ્વારા ચકાસીએ. બે ત્રિકોણો ABC *અને* PQR *દોરો, જે અનુરૂપ છે. એર્થાત્ તેમની બાજુઓ પ્રમાણમાં છે.*



આકૃતિ. 14.25

AD ^ BC અને PS ^ QR દોરો.

AD અને PS ની લંબાઈ માપો.

ગુણનફળ AD × BC અને PS × QR શોધો.

તમને જણાશે કે AD × BC = BC^2 અને PS × QR = QR^2

હવે AD × BC = 2 ΔABC નું ક્ષેત્રફળ

PS × QR = 2 ΔPQR નું ક્ષેત્રફળ

$$\therefore \quad \frac{\Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ}}{\Delta PQR \text{ નું ક્ષેત્રફળ}} = \frac{AD \times BC}{PS \times QR} = \frac{BC^2}{QR^2} \qquad \text{...(i)}$$

$$\frac{BC}{QR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} \quad \text{હોઈ}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ}}{\Delta PQR \text{ નું ક્ષેત્રફળ}} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{AC^2}{PR^2}$$

સમરૂપ ત્રિકોણોની વિવિધ જોડ લઈ આ પ્રવૃત્તિ ફરીથી કરી શકાય.

આપણે ઉદાહરણોની સહાયથી આ પરિણામો દર્શાવીએ.

ઉદાહરણ 14.7: બે સમરૂપ ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર શોધો, જો તેમની અનુરૂપ બાજુઓની જોડ 2.5 સેમી અને 5.0 સેમી હોય.

ઉકેલ: ધારો કે ABC અને PQR બે ત્રિકોણો છે.

BC = 2.5 સેમી અને QR = 5.0 સેમી

$$\frac{(\Delta ABC) \text{ ક્ષેત્રફળ}}{(\Delta PQR) \text{ ક્ષેત્રફળ}} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{(2.5)^2}{(5.0)^2} = \frac{1}{4}$$

ઉદાહરણ 14.8: ΔABC માં, $PQ \parallel BC$ અને AB અને AC ને અનુક્રમે P અને Q માં છેદે છે.

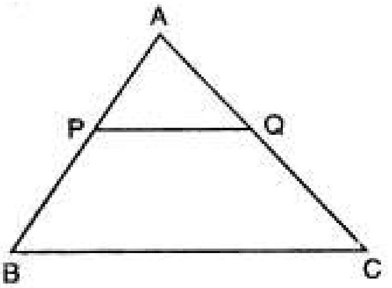
જો $\frac{AP}{BP}=\frac{2}{3}$ તો ΔAPQ અને ΔABC નાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.

ઉકેલ: આકૃતિ 14.26 માં

$PQ \parallel BC$

$\therefore \quad \frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{QC}=\frac{2}{3}$

$\therefore \quad \frac{BP}{AP}=\frac{QC}{AQ}=\frac{3}{2}$



આકૃતિ. 14.26

$\therefore 1+\frac{BP}{AP}=1+\frac{QC}{AQ}=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

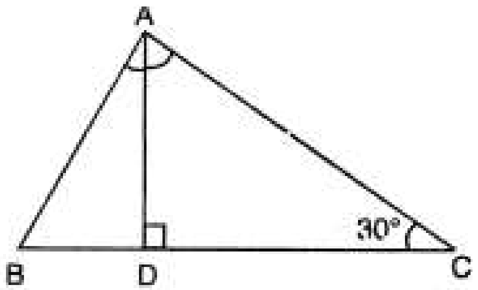
$\Rightarrow \quad \frac{AB}{AP}=\frac{AC}{AQ}=\frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{2}{5}$

$\therefore \quad \Delta APQ \sim \Delta ABC$

$$\therefore \frac{(\Delta APQ)\ \text{ક્ષેત્રફળ}}{(\Delta ABC)\ \text{ક્ષેત્રફળ}}=\frac{AP^2}{AB^2}=\left(\frac{AP}{AB}\right)^2=\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}(\because \Delta APQ \sim \Delta ABC)$$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 14.4

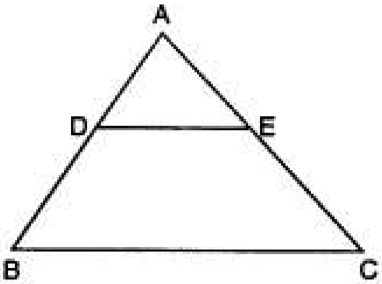
1. આકૃતિ 14.27 માં, ABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે. જેમાં $A = 90^\circ$ અને $C = 90^\circ$ દર્શાવો કે $\Delta DAB \sim \Delta DCA \sim \Delta ACB$.



આકૃતિ. 14.27

2. બે સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર શોધો, જેની અનુરૂપ બાજુઓ 3 અને 5 સેમી લંબાઈની છે.

3. આકૃતિ 14.28 માં, ABC એક ત્રિકોણ છે, જેમાં DE || BC. જો AB = 6 સેમી અને AD = 2 સેમી, તો ΔADC અને સમલંબ ચતુષ્કોણ ΔBCE નાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર શોધો.



આકૃતિ. 14.28

4. P, Q અને R એ ΔABC ની બાજુઓ AB, BC અને CA નાં અનુક્રમે મધ્યબિંદુઓ છે. દર્શાવો કે ΔPQR નું ક્ષેત્રફળ ΔABC ના ક્ષેત્રફળનું એક ચતુર્થાંશ છે.

5. બે સમરૂપ ત્રિકોણો ABC અને PQR માં, અનુરૂપ વેધ AD અને PS ગુણોત્તર 4:9 માં હોય, તો ΔABC અને ΔPQR ના ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.

$\left[\text{સંકેત : } \frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PS} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{PR}\right]$ નો ઉપયોગ કરો.

6. જો બે સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર 16:25 હોય તો તેમની અનુરૂપ બાજુઓ ગુણોત્તર શોધો.

14.6 બૌધાયન / પાયથાગોરસ પ્રમેય

હવે આપણે અગત્યનું પ્રમેય, જેને બૌધાયન / પાયથાગોરસ પ્રમેય કહે છે તે સમરૂપતાની સંકલ્પનાનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરીશું.

પ્રમેય : કાટકોણ ત્રિકોણમાં, કર્ણનો વર્ગ તે બીજી બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા બરાબર હોય છે.ફ્

પક્ષ : કાટકોણ ત્રિકોણ ABC જેમાં $\angle B = 90^\circ$.

સાધ્ય : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

રચના: B માંથી BD ^ AC દોરો (જુઓ આકૃતિ 14.29)

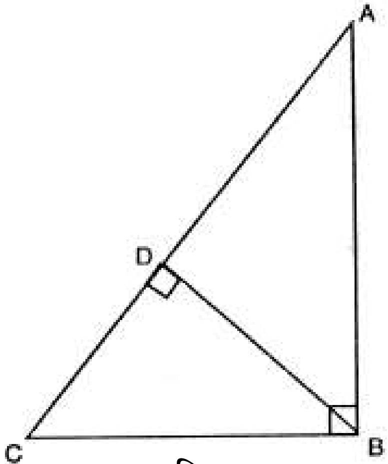
સાબિતી : BD ^ AC

$\therefore \quad \Delta ADB \sim \Delta ABC \quad$ ...(i)

અને $\quad \Delta BDC \sim \Delta ABC \quad$ ...(ii)

(i) માંથી મળે છે : $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$

➡ $\quad AB^2 = AC \,.\, AD \quad$ ...(X)



આકૃતિ. 14.29

(ii) માંથી મળે છે : $\frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC}$

Þ $\quad BC^2 = AC \,.\, DC \quad \quad ...(Y)$

(X) અને (Y),નો સરવાળો કરતાં આપણને મળે છે.

$$AB^2 + BC^2 = AC\,(AD + DC)$$

$$= AC \,.\, AC = AC^2$$

આ પ્રમેય પ્રખ્યાત ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રી પાયથાગોરસને નામે જાણીતું છે. પાયથાગોરસના 200 વર્ષ પહેલાં ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રી બૌધાયને (ઈ.સ. 800 વર્ષ) મૂળ રીતે આપેલો.

14.6.1 પાયથાગોર પ્રમેયનું પ્રતિપ્રમેય

ઉપરના પ્રમેયનું પ્રતિપ્રમેય નીચે મુજબ છે.

ત્રિકોણમાં એક બાજુ પરનો વર્ગ જો બીજી બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા બરાબર હોય, તો પ્રથમ બાજુની સામેનો ખૂણો કાટખૂણો હોય છે.

આ પરિણામ નીચેની પ્રવૃત્તિ દ્વારા ચકાશી શકાશે.

ત્રિકોણ ABC દોરો, જેમાં બાજુઓ 3 સેમી, 4 સેમી અને 5 સેમી હોય.

અર્થાત્ AB = 3 સેમી, BC = 4 -- સેમી

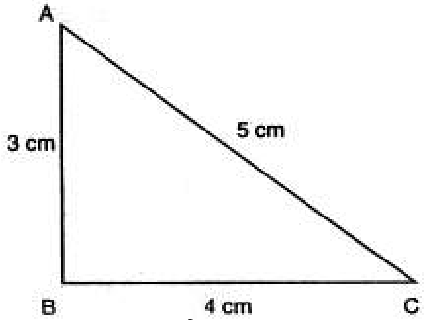
અને AC = 5 સેમી (આકૃતિ 14.30)

તમે જોઈ શકશો કે $AB^2 + BC^2 = (3)^2 + (4)^2$

$$= 9 + 16 = 25$$

$$AC^2 = (5)^2 = 25$$

$$\therefore\ AB^2 + BC^2 = AC^2$$



આકૃતિ. 14.30

આકૃતિ 14.30 માં ત્રિકોણ ઉપરના પરિણામની શરતનું સમાધાન કરે છે.

$\angle ABC$ માપો, તમને જણાશે કે $\angle ABC = 90^o$ બાજુઓ 5 સેમી, 12 સેમી, 13 સેમી તેમજ બાજુઓ 7 સેમી, 24 સેમી અને 25 સેમી તેવા ત્રિકોણો રચો. તમને ફરી જણાશે કે 13 સેમી અને 25 સેમી લંબાઈની બાજુઓ સામેનો ખૂણો 90^0 હોય છે.

ઉપરના પરિણામોને ઉપયોગ કરીને કેટલાંક ઉદાહરણો ઉકેલીએ.

ઉદાહરણ 14.9: કાટકોણ ત્રિકોણમાં, કાટખૂણો ધરાવતી બાજુઓ 5 સેમી અને 12 સેમી લંબાઈની છે. તો કર્ણની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ: ધારો કે ABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે, જેમાં B આગળ કાટકોણ છે.

$\therefore \quad$ AB = 5 સેમી, BC = 12 સેમી

વળી, $AC^2 = BC^2 + AB^2$

$= (12)^2 + (5)^2$

$= 144 + 125$

$= 169$

$\therefore \quad AC = 13$

અર્થાત કર્ણની લંબાઈ 13 સેમી છે.

ઉદાહરણ 14.10: લંબચોરસ કે જેની બાજુઓની લંબાઈ 3 સેમી 4 સેમી છે. તેના વિકર્ણની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ: આકૃતિ 14.31 માં, ABCD એ લંબચોરસ છે.

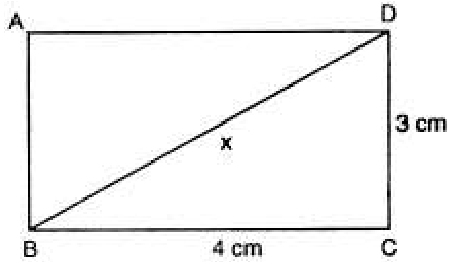
વિકર્ણ BD જોડો. હવે DCB એ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

$\therefore \quad BD^2 = BC^2 + CD^2$

$= 4^2 + 3^2$

$= 16 + 9 = 25$

$BD = 5$



અર્થાત્ લંબચોરસ ABCD ના વિકર્ણની લંબાઈ 5 સેમી છે.

આકૃતિ. 14.31

ઉદાહરણ 14.11: સમબાજુ ત્રિકોણમાં એક બાજુ પરના વર્ગના ત્રણ ગણા તે તેના વેધના ચાર ગણા બરાબર છે તેની ચકાસણી કરો.

ઉકેલ: વેધ $AD \perp BC$

અને $BD = CD$ (આકૃતિ. ૧૪.૩૨)

ધારો કે $AB = BC = CA = 2a$

અને $BD = CD = a$

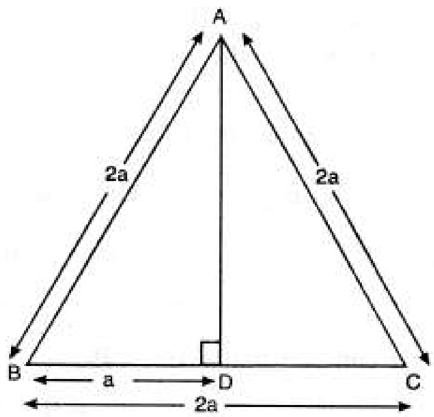
ધારો કે $AD = x$

$\therefore \quad x^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$

3. (બાજુ)^2 $= 3.(2a)^2 = 12a^2$

4. (વેધ)^2 $= 4.3a^2 = 12a^2$

તેથી પરિણામ સિદ્ધ થાય છે.



આકૃતિ. 14.32

ઉદાહરણ 14.12: ABC એ કાટકોણ ત્રિકોણ છે. જેમાં C આગળ કાટકોણ છે. જો CD, AB પર C માંથી લંબની લંબાઈ p હોય, BC = a, AC = b અને AB = c સાબિત કરો કે

(i) $pc = ab$

(ii) $\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

ઉકેલ : (i) CD ^ AB

$\therefore\ \Delta ABC \sim \Delta ACD$

$\therefore \frac{c}{b}=\frac{a}{p}$

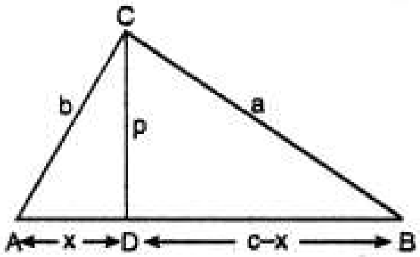
$pc = ab$

(ii) $AB^2 = AC^2 + BC^2$

અથવા $c^2 = b^2 + a^2$

$$\left(\frac{ab}{p}\right)^2 = b^2 + a^2$$

અથવા $\frac{1}{p^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$



આકૃતિ 14.33

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 14.5

1. *અમુક ત્રિકોણની બાજુઓ નીચે આપેલ છે, તે પૈકી કયા કાટકોણ ત્રિકોણો છે તે નક્કી કરો.*

   [AB = c, BC = a, CA = b]

   (i) a = 4 *સેમી*, b = 5 *સેમી*, c = 3 *સેમી*

   (ii) a = 1.6 *સેમી*, b = 3.8 *સેમી*, c = 4 *સેમી*

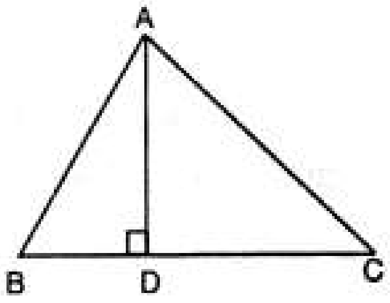
   (iii) a = 9 *સેમી*, b = 16 *સેમી*, c = 18 *સેમી*

   (iv) a = 7 *સેમી*, b = 24 *સેમી*, c = 25 *સેમી*

2. 6 *અને* 11 *મી ઉંચાઈના બે વાંસ સમતલ જમીન પર ઉભા છે. તેમના નીચલા તળિયા વચ્ચેનું અંતર* 12 *મી હોય, તો તેમની ટોચ વચ્ચેનું અંતર શોધો.*

3. 10 *સેમી બાજુવાળા ચોરસના વિકર્ણની લંબાઈ શોધો.*

4. *આકૃતિ* 14.34 *માં,* $\angle C$ *લઘુકોણ છે અને* AD ^ BC *દર્શાવો કે* $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2$ BC. DC



આકૃતિ. 14.34

5. B આગળ કાટકોણ હોય તેવા કાટકોણ ΔABC ની બાજુઓ AB અને AC નાં મધ્યબિંદુઓ L અને M છે. દર્શાવો કે $4LC^2 = AB^2 + 4BC^2$.

6. C આગળ કાટકોણ હોય તેવા DABC ની બાજુઓ CA અને CB પરનાં બિંદુઓ અનુક્રમે P અને Q છે. સાબિત કરો કે : $AQ^2 + BP^2 = AB^2 + PQ^2$

7. PQR એ સમદ્વિબાજુ કાટકોણ ત્રિકોણ છે જમાં $\angle Q = 90^\circ$ સાબિત કરો કે $PR^2 = 2PQ^2$.

8. એક સીડી દીવાલે આવી રીતે મૂકવામાં આવી છે જેથી તેની ટોચ દીવાલની 4 મી ઉંચાઈએ પહોંચે છે. જો સીડીનો તળભાગ દીવાલની 3 મી દૂર હોય, તો સીડીની લંબાઈ શોધો.

સારાંશ :

- જે વસ્તુઓને સમાન આકાર પણ વિવિધ કદ હોય છે તેમને સમરૂપ વસ્તુઓ કહે છે.
- કોઈ પણ બે બહુકોણ જેમના અનુરૂપ ખૂણા સમાન હોય અને અનુરૂપ બાજુઓ પ્રમાણમાં હોય તે સમરૂપ હોય છે.
- બે ત્રિકોણો સમરૂપ કહેવાય છે, જો

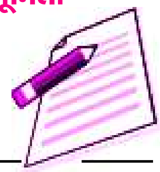
  (અ) તેમના અનુરૂપ ખુણાઓ સમાન હોય છે.

  (બ) તેમની અનુરૂપ બાજુઓ પ્રમાણમાં હોય
- સમરૂપતાની શરતો :

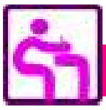
  - ખૂખૂખૂ શરત

  - બાબાબા શરત

  - બાખૂબા શરત
- જો એક રેખા ત્રિકોણની એક બાજુને સમાંતર દોરવામાં આવે, તો તે બીજી બે બાજુઓને સમપ્રમાણમાં વિભાગે છે અને તેનું પ્રતીપ.

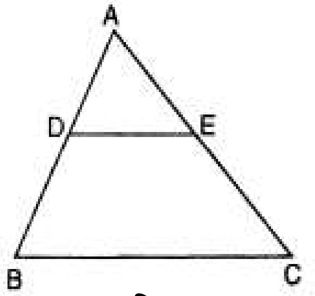


- ત્રિકોણના ખૂણાનો અંતઃદ્વિભાજક સામેની બાજુને ખૂણો ધરાવતી બાજુઓના ગુણાત્તરમાં વિભાગે છે.
- કાટકોણ ત્રિકોણમાં કાટખૂણાના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણને લંબ દોરવામાં આવે, તો રચાયેલ ત્રિકોણો એકબીજાને તેમજ આપેલ ત્રિકોણને સમરૂપ હોય છે.
- બે સમરૂપ ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર તેમની અનુરૂપ બાજુઓના વર્ગોના ગુણોત્તર જેટલો હોય છે.
- કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણનો વર્ગ એ બાકીની બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા બરાબર હોય છે. (બૌધાયન) પાયથાગોરસ પ્રમેય.
- ત્રિકોણમાં, એક બાજુનો વર્ગ જો બાકીની બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા બરાબર હોય, તો પ્રથમ બાજુની સામેનો ખૂણો કાટકોણ હોય છે - (બૌધાયન) પાયથાગોરસ પ્રમેયનું પ્રતિપ્રમેય.

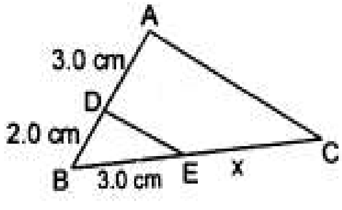


સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. બે બહુકોણોની સમરૂપતા માટેની શરતો લખો.
2. બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા માટે વિવિધ શરતો ગણાવો.
3. નીચેનામાંથી કયા કિસ્સાઓમાં, ત્રિકોણો ABC અને PQR સમરૂપ છે ?
   (i) $\angle A = 40^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle C = 80^\circ, \angle P = 40^\circ, \angle Q = 60^\circ$ અને $\angle R = 80^\circ$
   (ii) $\angle A = 50^\circ, \angle B = 70^\circ, \angle C = 60^\circ, \angle P = 50^\circ, \angle Q = 60^\circ$ અને $\angle R = 70^\circ$
   (iii) AB = 2.5 સેમી, BC = 4.5 સેમી, CA = 3.5 સેમી
   PQ = 5.0 સેમી, QR = 9.0 સેમી, RP = 7.0 સેમી
   (iv) AB = 3 સેમી, QR = 7.5 સેમી, RP = 5.0 સેમી
   PQ = 4.5 સેમી, QR = 7.5 સેમી, RP = 6.0 સેમી.
4. આકૃતિ ૧૪.૩૫ માં , AD = 3 સેમી, AE = 4.5 સેમી, DB = 4.0 સેમી, CE શોધ, આપેલા છે કે DE || BC.



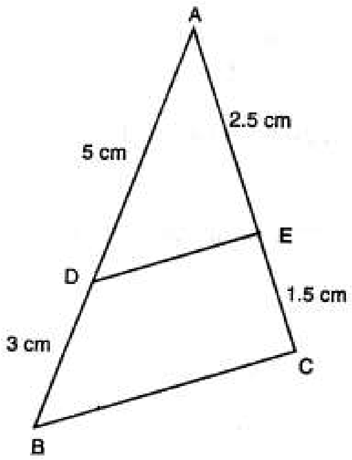
આકૃતિ. 14.35



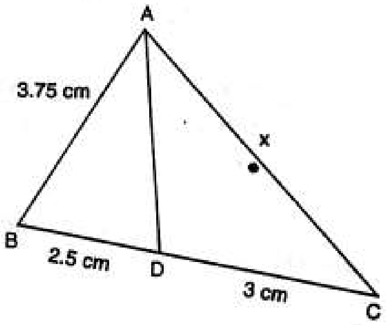
આકૃતિ. 14.36

5. આકૃતિ 14.36 માં DE || AC આકૃતિમાં આપેલ પરિણામમાંથી x ની કિંમત શોધો.

6. આકૃતિ 14.37 માં, ΔABC દર્શાવેલ છે જેમાં AD = 5 સેમી, DB = 3 સેમી, AE = 2.50 સેમી અને EC = 1.5 સેમી. DE || BC છે ? તમારા માટે કારણો આપો.



આકૃતિ. 14.37



આકૃતિ. 14.38

7. આકૃતિ 14.38માં, AD એ ΔABC ના ∠A નો અંત:દ્વિભાજક છે. આપેલ પરિણામમાંથી x શોધો.

8. બે સમરૂપ ત્રિકોણો ABC અને ΔEF ની પરિમિતિ 12 અને 18 સેમી છે, તો DABC ના ક્ષેત્રફળનો ΔDEF ના ક્ષેત્રફળ સાથેનો ગુણોત્તર શોધો.

9. બે સમરૂપ ત્રિકોણો ABC અને PQR ના વેધ AD અને PS 2.5 સેમી અને 3.5 સેમી લંબાઈના છે, તો -ΔABC ના ક્ષેત્રફળનો ΔPQR ના ક્ષેત્રફળ સાથેનો ગુણોત્તર શોધો.

10. નીચેના પૈકી કયા કાટકોણ ત્રિકોણ છે ?

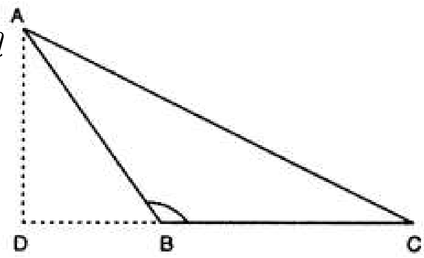
(i) AB = 5 સેમી, BC = 12 સેમી, CA = 13 સેમી

(ii) AB = 8 સેમી, BC = 6 સેમી, CA = 10 સેમી

(iii) AB = 10 સેમી, BC = 5 સેમી, CA = 6 સેમી

(iv) AB = 25 સેમી, BC = 24 સેમી, 7 = 13 સેમી

(v) $AB = a^2 + b^2$, $BC = 2ab$, $CA = a^2 - b^2$



આકૃતિ. 14.39

11. 2a બાજુવાળા સમબાજુ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

12. 12 મી અને 17 મી ઉંચાઈના બે સમતલ જમીન પર ઉભા છે અને તેમનાં તળિયાં વચ્ચેનું અંતર 12 મી છે. તમની ટોચ વચ્ચેનું અંતર શોધો.

13. આકૃતિ 14.39 માં દર્શાવો કે

$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2\,BC.\,CD$

14. એક સીડી દીવાલને અડીને મૂકી છે અને તેની ટોચ જમીનથી 8 ઉંચાઈએ પહોંચે છે. જો દીવાલ અને સીડીના તળિયા વચ્ચેનું અંતર 6 મી હોય, તો સીડીની લંબાઈ શોધો.

15. સમબાજુ ત્રિકોણમાં, દર્શાવો કે બાજુના વર્ગના ત્રણ ગણા મધ્યગાના વર્ગના ચાર ગણા બરાબર છે.

ઉત્તરો

14.1

1. (i) 6 (ii) 6 (iii) 10 સેમી

2. (i) ના (ii) હા (iii) હા

14.2

1. 7.5 સેમી 2. 4 સેમી

3. $\frac{yz}{x}$ ($x = -1$ શક્ય નથી.)

14.3

1. (i) $x = 4.5, y = 3.5$ (ii) $x = 70, y = 50$ (iii) $x = 2$ cm, $y = 7$ સેમી

14.4

2. 9 : 25 3. 1 : 8 5. 16 : 81 6. 4 : 5

14.5

1. (i) હા (ii) ના (iii) ના (iv) હા

2. 13 મી 3. $10\sqrt{2}$ સેમી 8. 5 મી

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

3. (i) અને (iii) 4. 6 સેમી 5. 4.5 સેમી 6. હા : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

7. 4.5 સેમી 8. 4 : 9 9. 25 : 49 10. (i), (ii), (iv) અને (v)

11. $\sqrt{3}\,a^2$ 12. 13 મી 14. 10 મી