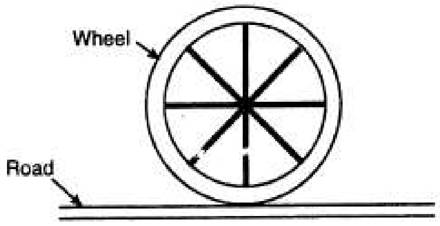
17

છેદિકાઓ, સ્પર્શકો અને તેમના ગુણધર્મો

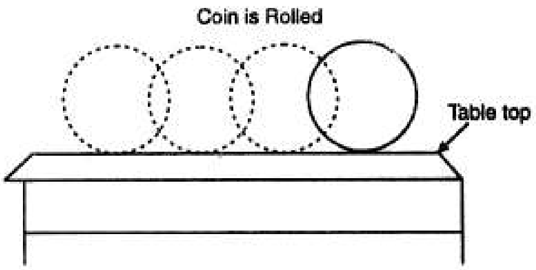
પરિચય

ચાલતી સાઈકલ જુઓ, તમે જોશો કે કોઈ પણ ક્ષણે ગતિ કરતી સાઈકલના ચક્રો રસ્તાના અતિ મર્યાદિત ક્ષેત્રફળને સ્પર્શે છે, વધુ ચોકસાઈથી કહીએ તો તે એક બિંદુને સ્પર્શે છે.
જો તમે સિક્કાને લીસી સપાટી જેમ કે ટેબલ કે લાદી પર ગબડાવો તો તમને જણાશે કે કોઈ પણ ક્ષણે સિક્કાનું માત્ર એક બિંદુ ગબડાવેલ સપાટીના સંપર્કમાં આવે છે ?

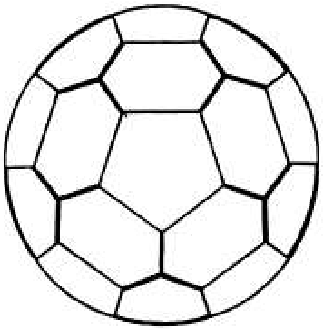
ઉપરની પરિસ્થિતિઓમાં તમે શું જુઓ છો ?



(i)



(ii)



(iii)

આકૃતિ . 17.1

જો તમે ચક્ર કે સિક્કા ને વર્તુળ અને સ્પર્શતી સપાટી (રસ્તો કે ટેબલ) ને રેખા તરીકે વિચારો , તો ઉપરનાં ઉદાહરણો દર્શાવે છે કે રેખા વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે આ પ્રકરણમાં આપણે શક્ય સંપર્કો જે રેખા અને વર્તુળ ધરાવે છે તે વિશે શીખીશું અને તેમના ગુણધર્મો શીખવા પ્રયત્ન કરીશું.

હેતુઓ

આ પાઠ શીખ્યા પછી, અધ્યેતા :

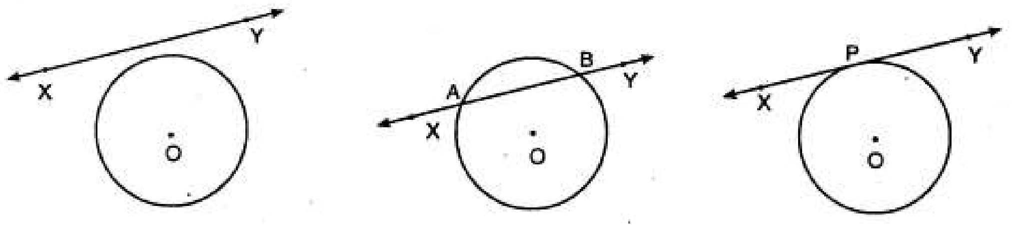
- વર્તુળની છેદિકા અને તેના સ્પર્શકની વ્યાખ્યા આપી શકશે.
- છેદિકા અને સ્પર્શક વચ્ચેનો ભેદ પારખી શકશે.
- વર્તુળને તેની બહારના બિંદુમાંથી દોરેલા સ્પર્શકો લંબાઈમાં સરખા હોય છે.
- વર્તુળનાં સ્પર્શક અને છેદિકા સંબંધિત અગત્યના પરિણામો (અભ્યાસક્રમમાં આપેલ) ચકાસી શકશે અને તેમનો ઉપયોગ કરી શકશે.

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

- કોણ અને રેખાખંડનું માપન
- આપેલ ત્રિજ્યાના વર્તુળો દોરવાં.
- આપેલ રેખાને લંબ અને સમાંતર રેખાઓ દોરવી.
- રેખા અને કોણ, એકરૂપતા અને વર્તુળ વિશે અગાઉનાં પરિણામોનું જ્ઞાન.
- પાયથાગોરસ પ્રમેયનું જ્ઞાન.

17.1 છેદિકા અને સ્પર્શક - પરિચય

અગાઉના પાઠોમાં તમે રેખા અને વર્તુળ વિશે શીખી ગયા છો. યાદ કરો કે વર્તુળ એ સમતલમાં કોઈ બિંદુનો બિંદુપથ છે, જે એવી રીતે ગતિ કરે છે કે સમતલમાં નિયત બિંદુથી તેનું અંતર અચળ રહે છે આ નિયત બિંદુને વર્તુળનું કેન્દ્ર કહે છે કે સમતલમાં નિયત બિંદુથી તેનું અંતર અચળ રહે છે આ નિયત બિંદુને વર્તુળનું કેન્દ્ર કહે છે અને અચળ અંતરને વર્તુળની ત્રિજ્યા કહે છે. તમે એ પણ જાણો છો કે રેખા એ બિંદુઓનો સમૂહ છે જે બંને બાજુએ અનંત રીતે વિસ્તરે છે, જ્યારે રેખાખંડ એ બે બિંદુઓથી બંધાયેલ રેખાનો ભાગ છે.



આકૃતિ. 17.2

હવે એવો કિસ્સો વિચારો, જ્યારે રેખા અને વર્તુળ તે જ સમતલમાં એક સાથે અસ્તિત્વ ધરાવે છે. આકૃતિ 17.2માં

દર્શાવ્યા મુજબ , ત્રણ ભિન્ન શક્યતાઓ હશે.

તમે જોઈ શકશો કે આકૃતિ 17.2 (i) માં રેખા XYO કેન્દ્રવાળા વર્તુળને છેદતી નથી. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, રેખા XY અને વર્તુળને કોઈ સામાન્ય બિંદુ નથી, આકૃતિ 17.2 (ii) માં રેખા XY વર્તુળને બે ભિન્ન બિંદુઓ A અને B માં છેદે છે અને રેખા વર્તુળને બિંદુ P એ સ્પર્શ કરે છે એમ કહેવાય છે.

આમ, આપણે કહી શકીએ કે રેખા અને વર્તુળના છેદનના કિસ્સામાં, નીચેની ત્રણ શક્યતાઓ રહેલી છે.

(i) રેખા વર્તુળને બિલકુલ છેદતી નથી, અર્થાત રેખા વર્તુળના બહિર્ભાગમાં પડે છે.

(ii) રેખા વર્તુળને બે ભિન્ન બિંદુઓમાં છેદે છે . તે કિસ્સામાં, રેખાનો અમુક ભાગ વર્તુળના અંતભાગમાં પડે છે, છેદનનાં બે બિંદુઓ વર્તુળ પર પડે છે અને બાકીનો ભાગ વર્તુળના બાહિભાગમાં પડે છે.

(iii) રેખા વર્તુળને બરાબર એક બિંદુએ સ્પર્શે છે, તેથી આપણે નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યા કરીએ :

સ્પર્શક :

રેખા કે જે વર્તુળને બરાબર એક બિંદુએ સ્પર્શે છે તે સ્પર્શક રેખા કહેવાય છે અને બિંદુ કે જ્યાં તે વર્તુળને સ્પર્શે છે તેને બિંદુ કહે છે.

આમ, આકૃતિ 17.2 (ii) માં,XY એ વર્તુળને P આગળ સ્પર્શક છે, જેને લ(P ને) સ્પર્શબિંદુ કહે છે.

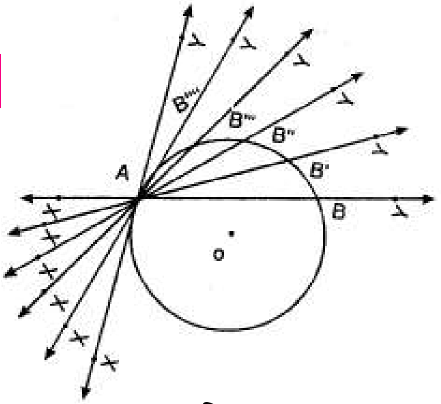
છેદિકા :

રેખા કે જે વર્તુળ બે ભિન્ન બિંદુઓમાં છેદે છે તેને છેદિકા રેખા (સામાન્ય રીતે છેદિકા) કહે છે.

આકૃતિ 17.2 (ii) માં,XY વર્તુળને છેદિકા રેખા છે અને A અને B રેખા XY અને O કેન્દ્રવાળા વર્તુળનાં છેદન બિંદુઓ છે.

17.2 સ્પર્શક, છેદિકાના સીમાન્ત કિસ્સા તરીકે

O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની છેદિકા XY વિચારો જે વર્તુળને બિંદુઓ A અને B માં છેદે છે. કલ્પના કરો કે વર્તુળ પર પડતું છેદિકા XY નું બિંદુ A અચળ છે અને છેદિકા A ના આજુબાજુ ફરે છે જે આકૃતિ 17.3માં દર્શાવ્યા મુજબ વર્તુળને B આગળ છેદે છે, અને આખરે રેખા XAY ની સ્થિતિ મેળવે છે, જ્યારે તે વર્તુળને A આગળ સ્પર્શક બને છે.



આકૃતિ. 17.3

આમ આપણે કહીએ કે :

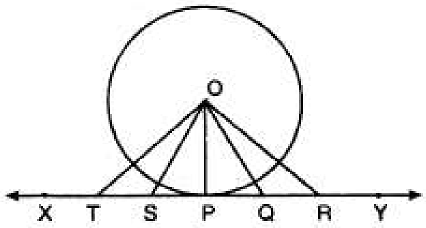
સ્પર્શક એ છેદિકાની સીમાન્ત સ્થિતિ છે, જ્યારે છેદનના બે બિદુંઓ એકરાર થાય છે.

17.3 સ્પર્શબિંદુમાંથી સ્પર્શક અને ત્રિજ્યા

0 કેન્દ્રવાળા વર્તુળને P બિંદુએ XY એક સ્પર્શક છે OP જોડો.

સ્પર્શક XY પર બિદુઓ Q,R,S અને T લો અને OQ, OR, OS અને OT જોડો Q,R,S અને T એ વર્તુળના બાહિર્ભાગમાં બિંદુઓ હોઈ તેમજ P વર્તુળ પર હોઈ ,

OP એ OQ, OR,OS અને OT કરતાં નાની છે.



આકૃતિ. 17.3

ભૂમિતિના આપણા અગાઉના અભ્યાસ પરથી આપણે જાણીએ વછીએ કે તમામ રેખાખંડો જે બિંદુ (રેખા પરના નહિ) માંથી રેખા પર દોરી શકાય તે પૈકી લંબ રેખા એ સૌથી ટૂંકી છે.

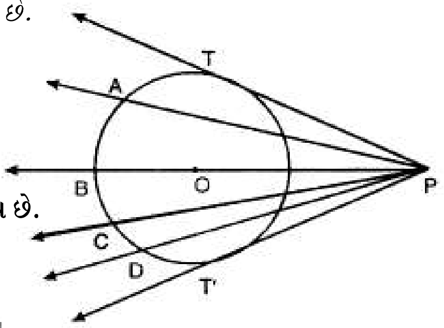
O એ XY રેખાને O બિંદુમાંથી ટૂંકામાં ટૂંકુ અંતર હોઈ

$\therefore \quad OP \perp XY$

આમ, આપણે કહી શકીએ કે :

વર્તુળના સ્પર્શબિંદુમાંથી દોરેલ ત્રિજ્યા તે બિંદુએ સ્પર્શકને લંબ હોય છે.

OPX અને OPY કોણ માપીને અને તે દરેક 90° જાણીને પણ ઉપરનું પરિણામ ચકાસી શકાય.



આકૃતિ. 17.5

17.4 વર્તુળના બહારના બિંદુમાંતી સ્પર્શકો

0 કેન્દ્રવાળા વર્તુળના બહિર્ભાગમાં કોઈ બિંદુ P લો P માંથી રેખાઓ દોરો , આમાંની કેટલીક આકૃતિ 17.5 માં PT,PB,PA,PC,PD, અને PT દર્શાવવામાં આવેલ છે.

આ પૈકીની કેટલીક વર્તુળને સ્પર્શે છે ? માત્ર બે. અન્ય બિંદુ અને વર્તુળ લઈ આ પ્રવૃત્તિ ફરી કરો. ફરીથી પણ તમને તે જ પરિણામ મળશે ?

આમ આપણે કહી શકીએ કે :

બાહ્ય બિંદુમાંથી વર્તુળને બે સ્પર્શક દોરી શકાય .

જો બિંદુ P વર્તુળ પર પડે, તો શું તે બિંદુમાંથી પણ વર્તુળને બે સ્પર્શક ? તમે જોઈ શકશો કે તે કિસ્સામાં વર્તુળને માત્ર એક સ્પર્શક દોરી શકાય P વર્તુળના અંત : ભાગમાં હોય તો તે કિસ્સા વિશે શુ ? નોંધો કે તે કિસ્સામાં P માંથી કોઈ પણ રેખા વર્તુળને બે બિંદુઓમાં છેદે છે અને તેથી અંત : ભાગમાંનાં બિંદુઓમાંથી વર્તુળને એક પણ સ્પર્શક દોરી શકાય નહીં.

હવે PT અને PT ની લંબાઈ માપો અને તમને જણાશે કે.

$PT = PT \qquad ....(i)$

(B) **આપણે આ તાર્કિક રીતે પણ જોઈએ.**

બે : $PT = PT'$ વિચારો

OP, OT અને OT′

OPT અને OPT′

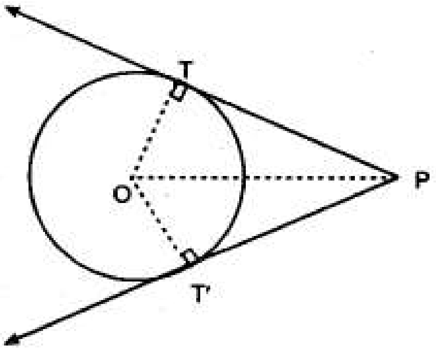
$\angle OTP = Đ\ OT'P$ (દરેક કાટકોણ છે)

$OT = OT'$ (એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

$OP = OP$ (સામાન્ય)

$\Delta OPT \cong \Delta\ OPT'$

$\therefore\ PT = PT'$



આકૃતિ. 17.6

`(A)અને`(B) પરથી આપણે કહી શકીએ કે

બાહ્યબિંદુમાંથી દોરેલા બે સ્પર્શકોની લંબાઈ સમાન હોય છે.

આકૃતિ 17.6, $\Delta OPT \cong \Delta OPT'$

$$\angle OPT' = \angle OPT'$$

આમ, આપણે કહી શકીએ કે

બાહ્ય બિંદુમાંથી વર્તુળને દોરેસલ સ્પર્શકો બિંદુને વર્તુળના કેન્દ્ર સાથે જોડતી રેખા સાથે સમાન રીતે ઢળેલા હોય છે . (બાહ્ય બિંદુ અને કેન્દ્રને જોડતી રેખા, સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાને દુભાગે છે.

આ દર્શાવવા હવે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ **17.1:** આકૃતિ 17.7માં, OP = 5 સેમી અને વર્તુળની ત્રિજ્યા 3 સેમી છે. O કેન્દ્રવાળા વર્તુળને P બિંદુમાંથી તરેલ સ્પર્શક PT ની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ: $\angle OTP = 90^\circ$, Let PT = x

કાટકોણ ત્રિકોણ OPT માં

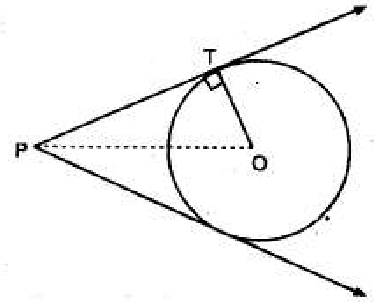
$$OP^2 = OT^2 + PT^2$$

અથવા $5^2 = 3^2 + x^2$

અથવા $x^2 = 25 - 9 = 16$

$$x = 4$$

અર્થાત્ સ્પર્શક PT ની લંબાઈ = 4 સેમી



આકૃતિ. 17.7

ઉદાહરણ **17.2:** આકૃતિ 17.8માં 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના કેન્દ્રથી 25 સેમી અંતરે બિંદુ P માંથી સ્પર્શકો PT અને PT દોરવામાં આવેલ છે. તો PT અને PT ની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : Here OP = 25 સેમી અને OT = 7 સેમી

$\angle OTP = 90^\circ$

$$PT^2 = OP^2 - OT^2$$

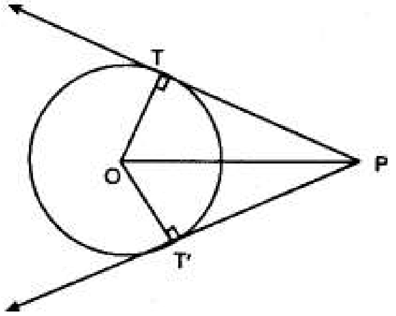
$$= 625 - 49 = 576 = (24)^2$$

PT = 24 સેમી

આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે

$$PT = PT'$$

PT′ = 24 સેમી



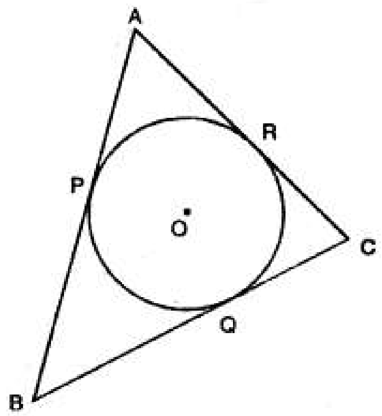
આકૃતિ . 17.8

ઉદાહરણ**17.3:** આકૃતિ 17.9, માં A,B અને C,O કેન્દ્રવાળા વર્તુળનાં ત્રણ બાહ્ય બિંદુઓ છે . સ્પર્શકો AP,BQ અને CR 3 સેમી 4,સેમી અને 3.5 સેમી લંબાઈના છે, તો ΔABC ની પરિમિતી શોધો.

ઉકેલ: આપણે જાણીએ છીએ કે બાહ્ય બિંદુમાંતી વર્તુળને બે સ્પર્શકોની લંબાઈ સમાન હોય છે.

$$AP = AR$$

$$BP = BQ,$$



આકૃતિ . 17.9

$CQ = CR$

$AP = AR = 3$ cm

$BP = BQ = 4$ સેમી

અને $CR = CQ = 3.5$ સેમી

$AB = AP + PB;$

$= (3 + 4)$ સેમી $= 7$ સેમી

$BC = BQ + QC;$

$= (4 + 3.5)$ સેમી $= 7.5$ સેમી

$CA = AR + CR$

$= (3 + 3.5)$ સેમી

$= 6.5$ સેમી

ABC ની પરિમિતિ $= (7 + 7.5 + 6.5)$ સેમી $= 21$ સેમી

ઉદાહરણ 17.4: આકૃતિ. 17.10, $\angle AOB = 50^o$. $\angle ABO$ અને $\angle OBT$ શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $OA \perp XY$

$\angle OAB = 90^o$

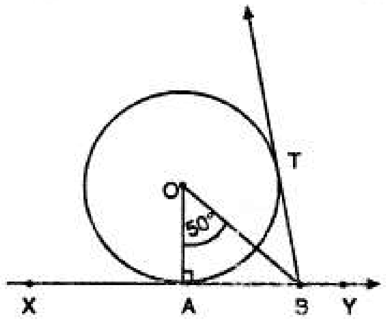
$\angle ABO = 180^o - (\angle OAB + \angle AOB)$

$= 180^o - (90^o + 50^o) = 40^o$

આપણે જાણીએ છીએ કે $\angle OAB = \angle OBT$

$\angle OBT = 40^o$

$\angle ABO = \angle OBT = 40^o$



આકૃતિ . 17.10

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 17.1

1. યોગ્ય શબ્દો વડે ખાલી જગ્યા પૂરો .

(i) સ્પર્શક સ્પર્શબિંદુમાંથી ત્રિજ્યાને ________ છે.

(ii) વર્તુળને બાહ્ય બિંદુમાંતી સ્પર્શકોની લંબાઈ ________ હોય છે.

(iii) સ્પર્શક છેદિકાની સીમાન્ત સ્થિતિ છે , જ્યારે બે ________ થાય છે.

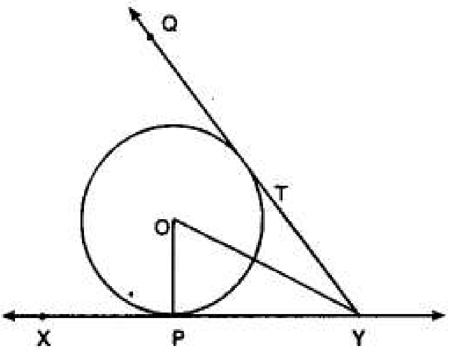
(iv) બાહ્ય બિંદુમાંથી ________ સ્પર્શકો વર્તુળને દોરી શકાય છે.

(v) વર્તુળના અંત : ભાગના બિંદુમાંથી ________ સ્પર્શક વર્તુળને દોરી શકાય (શૂન્ય,એક,બે)

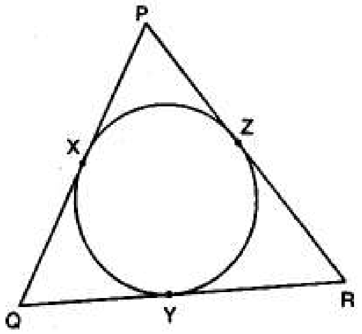
2. આકૃતિ. 17.11, $\angle POY = 40^o$, $\angle OYP$ અને $\angle OYT$ શોધો.

3. આકૃતિ. 17.12, માં ΔPQR નું અંતઃવૃત્ત દોરવામાં આવેલા છે . જો $PX = 2.5$ cm, $RZ = 3.5$ સેમી અને $\Delta PQR = 18$ સેમી, હોય, તો QY ની લંબાઈ શોધો.

B



આકૃતિ . 17.11



આકૃતિ. 17.12

4. બાહ્ય બિંદુમાંથી વર્તુળને (દોરેલ) સ્પર્શકોની લંબાઈ સમાન હોય છે, દર્શાવતો પ્રયોગ લખો.

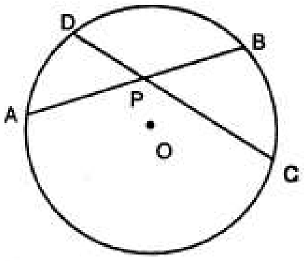
17.5 વર્તુળની અંદર અને બહાર છેદતી જીવાઓ

તમે અગાઉના પ્રકરણમાં જીવાઓ અંગે વિવિધ પરિણામો વિશે શીખી ગયો છો બે જીવાઓ વર્તુળની અંદર છેદતી હોય અથવા જીવાઓ લંબાવાથી વર્તુળની બહારના ભાગમાં છેદતી હોય તે વિશે કેટલાંક પરિણામો હવે આપણે ચકાસીશું.

O કેન્દ્રવાળુ અને કોઈ પણ ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો. વર્તુળમાં P બિંદુએ છેદતી બે જીવાઓ AB અને CD દોરો.

રેખાખંડ PD, PC, PA અને PB ની લંબાઈ માપો ગુણફળ $PA \times PB$ અને $PC \times PD$ શોધો તમને જણાશે કે તે સમાન હોય છે. અન્ય બે વર્તુળો લઈ તેની અંદર છેદતી જીવાઓ દોર્યા પછી ઉપરની પ્રવૃત્તિ ફરી કરો. તમે ફરી જોશો કે.

$PA \times PB = PC \times PD$



આકૃતિ . 17.13

હવે આપણે વર્તુળની બહાર છેદતી જીવાઓના કિસ્સો લઈએ. આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ : કોઈ પણ ત્રિજ્યા અને 0 કેન્દ્રવાળું વર્તુળ દોરો. બે જીવાઓ BA અને DC દોરો જે એકબીજાને વર્તુળની બહાર P બિંદુએ છેદતી હોય, રેખાખંડ PA, PB, PC અને PD ની લંબાઈ માપો ગુણનફળ $PA \times PB$ અને $PC \times PD$ શોધો.

તમે જોશો કે ગુણનફળ $PA \times PB$ ગુણનફળ

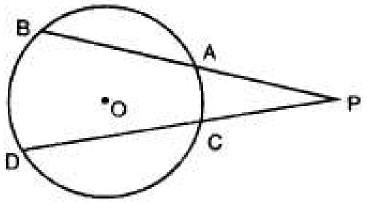
$PC \times PD$ બરાબર થે, અર્થાત્

$PA \times PB = PC \times PD$ થાય છે.

આ પ્રવૃત્તિ અન્ય બે વર્તુળ લઈ ફરી કરો, જેમાં

જીવાઓ એક બીજાને વર્તુળની બહાર છેદતી હોય ફરી

તમે જાણી શખશો કે $PA \times PB = PC \times PD$ થાય છે.



આકૃતિ . 17.14

આમ આપણે કહી શકીએ કે :

નોંધ

જો બે જીવાઓ .. અને .. (વર્તુળની અંદર અથવા) .. બિંદુએ છેદે, તો
$PA \times PB = PC \times PD$

17.6 વર્તુળની છેદિકા અને સ્પર્શક

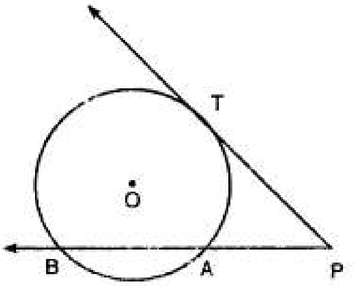
વર્તુળની છેદિકા અને સ્પર્શક વસ્તુની બહાર છેદતા હોય ત્યારે તેમની સંબંધ છે કે કેમ તે જોવા આપણે નીચેના પ્રવૃત્તિ કરીએ O કેન્દ્રવાળું અને કોઈ પણ ત્રિજ્યાવાળું એક વર્તુળ દોરો.

બાહ્ય બિંદુ P માંથી વર્તુળને PAB છેદિકા અને સ્પર્શક PT દોરો.

રેખાખંડ PA,PB અને PT ની લંબાઈ માપો .

ગુણનફળ $PA \times PB$અને $PT \times PT$ ની લંબાઈ માપો.

શુ પરિણામ મળે છે ? તમે જોઈ શકશો કે $PA \times PB=PT^2$ થાય છે.



આકૃતિ . 17.15

You will find that

$$PA \times PB = PT^2$$

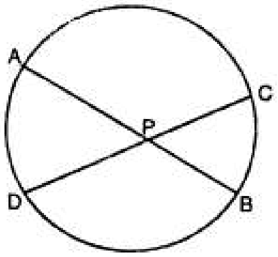
ઉપરની પ્રવૃત્તિ અન્ય બે વર્તુળો લઈ ફરી કરો. તમને ફરીથી તેજ પરિણામ આમ, આપણે કહી શકએ.

જો PAB એ વર્તુળને A અને B બિંદુએ છેદિકા હોય, અને PT વર્તુળને T બિંદુએ સ્પર્શક હોય, તો

$$PA \times PB = PT^2$$

ચાલો આપણે ઉદાહરણોની સહાયથી જોઈએ .

ઉદાહરણ17.5: આકૃતિ. 17.16,માં AB અને CD વર્તુળની બે જીવાઓ છે, જે વર્તુળની અંદરના ભાગમાં P બિંદુએ છેદે છે. જોPA = 3 સેમી PB =2સેમી, PC =1.5 સેમી હોય, તો ,PDની લંબાઈ શોધો.



આકૃતિ . 17.16

ઉકેલ : આપેલ છે કે PA = 3 સેમી, PB = 2 સેમી અને PC = 1.5 સેમી.

ધારો કે $PD = x$

આપણે જાણીએ છીએ કે $PA \times PB = PC \times PD$

$$\Rightarrow \quad 3 \times 2 = (1.5) \times x$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{3 \times 2}{1.5} = 4$$

$\therefore$ રેખાખંડ PD ની લંબાઈ= 4 સેમી.

ઉકેલ 17.6: આકૃતિ. 17.17,માં PAB એ વર્તુળની બહારના P બિંદુમાંથી વર્તુળની છેદિકા છે. PAB વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી પસાર થાય છે. અને PT એ સ્પર્શક છે . જો PT = 8 સેમી અને OP=10 સેમી, તો $PA \times PB = PT^2$ નો ઉપયોગ કરી વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.

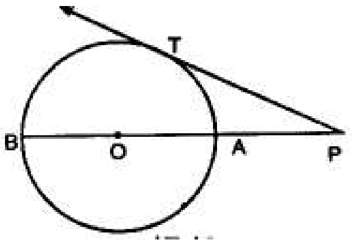
ઉકેલ : ધારો કે વર્તુળની ત્રિજ્યા x છે.

આપેલ છે કે $OP = 10$ સેમી

$PA = PO - OA = (10 - x)$ સેમી

અને $PB = OP + OB = (10 + x)$ સેમી

$PT = 8$ સેમી



આકૃતિ. 17.17

આપણે જાણીએ છીએ કે $PA \times PB = PT^2$

$(10 - x)(10 + x) = 8^2$

અથવા $100 - x^2 = 64$

અથવા $x^2 = 36$ અથવા $x = 6$

અર્થાત્ વર્તુળની ત્રિજ્યા

ઉદાહરણ : 17.7: આકૃતિ 20.18માં, BA અને DC વર્તુળની એવી બે જીવાઓ છે જે એકબીજીને વર્તુળના બહિર્ભાગના P બિંદુએ છેદે છે. જો PA = 4 સેમી PB = 10 સેમી CD = 3 સેમી હોય તો PC શોધો.

ઉકેલ : આપણને આપે છે કે PA = 4સેમી, PB = 10 સેમી, CD = 3 સેમી

ધારો કે $PC = x$

$PA \times PB = PC \times PD$

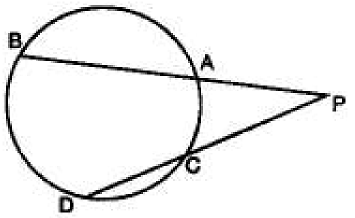
અથવા $4 \times 10 = (x + 3)\,x$

અથવા $x^2 + 3x - 40 = 0$

$(x + 8)(x - 5) = 0$

$x = 5$

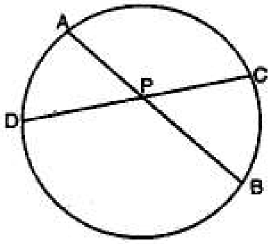
$PC = 5$ સેમી



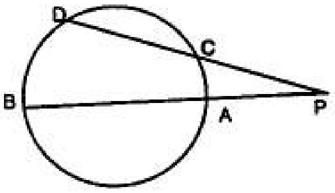
આકૃતિ . 17.18

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 17.2

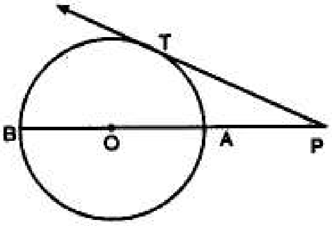
1. આકૃતિ 17.19, માં PA = 3 સેમી હોય, PB = 6 સેમી અને PD = 4 સેમી હોય તો PC ની લંબાઈ શોધો.
2. આકૃતિ. 17.19માં , PA = 4 સેમી, PB = x + 3, PD = 3 સેમી અને PC = x + 5, તો x ની કિંમત શોધો.



આકૃતિ . 17.19



આકૃતિ . 17.20



આકૃતિ . 17.21

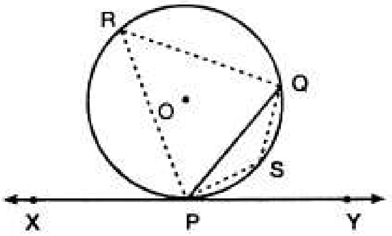
નોંધ

3. આકૃતિ. 17.20, if PA = 4સેમી, PB = 10 cm, PC = 5 સેમી, PD.
4. આકૃતિ. 17.20, if PC = 4 સેમી, PD = (x + 5) સેમી, PA = 5 સેમી અને PB = (x + 2) સેમી, find x.
5. આકૃતિ. 17.21, PT = $2\sqrt{7}$ સેમી, OP = 8 સેમી, છે જો વર્તુળનું કેન્દ્ર O હોય તો વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.

17.7 સ્પર્શક અને જીવા દ્વારા રચાતા કોણ

O કેન્દ્રવાળું વર્તુળ લો વર્તુળને P બિંદુએ XY સ્પર્શક ધારો આકૃતિ 17.20માં દર્શાવ્યા મુજબ P બિંદુમાંથી વર્તુળની જીવા PQ દોરો. ગુરુચાપ PRQ પર બિંદુ R અંકિત કરો અને લઘુ ચાપ PSQ પર બિંદુ PRQ પારો ગુરુ ચાપ PRQ અને જીવા PQ વડે રચાતો ખંડ ∠QPY નો

વિરુદ્ધ વૃત્ત કહેવાય છે. અને લઘુ અને જીવા વડે રચાતો ખંડ ∠QPX નો વિરુદ્ધ વૃત્ત ખંડ કહેવાય છે. વિરિદ્ધ વૃત્ત ખંડોમાંના કોણ તેમજ સ્પર્શક અને જીવા વચ્ચેના કોણ વચ્ચેચ કોઈ સંબંધ છે કે કેમ તે જોઈએ. ∠QR અને PR માપો (જુઓ આકૃતિ 17.22) તમેને શુ જણાય છે. તમે જાશો કે ∠PRQ = ∠QPY



આકૃતિ . 17.22

અન્ય વર્તુળ અને સમાન કે જુદી જુદી ત્રિજ્યા લઈ આ આકૃતિ ફરી કરો. તમે ફરીથી જોશો કે ∠QPY = ∠PRQ

હવે ∠QPX અને ∠PRQ માપો તમે ફરીથી જોશો કે આ ખૂણા પણ સમાન છે.

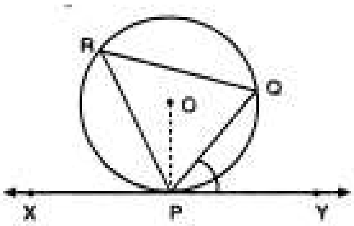
આમ આપણે કહી શકીએ કે :

> **વર્તુળના સ્પર્શકના સ્પર્શબિંદુ એ દોરેલી જીવા દ્વારા વિરુદ્ધ વૃત્ત ખંડોમાં રચાતો કોણ જીવા અને સ્પર્શક વચ્ચેના કોણ જેવડો હોય છે.**

આ પરિણામ સામાન્ય રીતે વિરૂદ્ધ વૃત્ત ખંડોના ખૂણાની રીતે ઓળખાય છે.

હવે આપણે ઉપરના પરિણામનું પ્રતિપ્રમેય ચકાસીએ.

O કેન્દ્રવાળું વર્તુળ દોરો અને એક જીવા PQ દોરો અને આકૃતિ 20.23માં દર્શાવ્યા મુજબ વિરુદ્ધ વૃત્ત ખંડમાં ∠PRQ રચો. P બિંદુએ ∠QPR = ∠QRP દોરો રેખાખંડ PY ને બંન બાજુ લંબાવો જેથી XY રેખા રચાય OP જોડો અને ∠OPY માપો.



આકૃતિ . 17.23

તમે જાણ્યું તમને જણાશે કે ∠OPY = 90^0 જે દર્શાવે છે કે XY એ વર્તુળનો સ્પર્શક છે. જુદાં જુદાં વર્તુળો લઈ આ પ્રવૃત્તિ ફરી કરો. તમને તે જ પરિણામ મળશે. આમ, આપણે કહી શકીએ કે :

> **જો રેખા જીવા સાથે એવા કોણ રચે, જે વિરુદ્ધ વૃત્ત ખંડમાં જીવા દ્વારા રચાયેલ કોણને અનુક્રમે સમાન છે. તો રેખા વર્તુળનો સ્પર્શક હોય છે.**

હવે આપણે તે દર્શાવવા કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ .

ઉદાહરણ :- **17.8 આકૃત્તિ 17.24**માં XY એ O કેન્દ્રવાળા

વર્તુળને સ્પર્શક છે. જો AOB એ વ્યાસ હોય અને $\angle PAB = 40^0$ હોય તો $\angle APX$ અને $\angle BPY$ શોધો.

ઉકેલ : વિરુદ્ધ વૃત્ત ખંડ પ્રમેય દ્વારા આપણે જાણીએ છીએ કે

$\angle BPY =$ ÐBAP

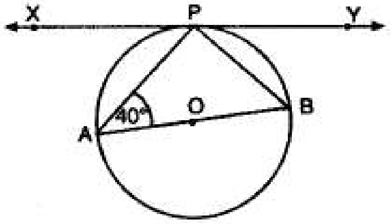
$\angle BPY = 40^\circ$

વળી $\angle APB = 90^\circ$ (અર્ધવૃત્તમાં અંગર્તકોણ)

અને, $\angle BPY + \angle APB + \angle APX = 180^\circ$ (રેખા પરના કોણ)

$\angle APX = 180^\circ - (\angle BPY + \angle APB)$

$= 180^\circ - (40^\circ + 90^\circ) = 50^\circ$



આકૃતિ . 17.24

ઉદાહરણ 17.9: આકૃતિ. 17.25, ABC એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે. જેમાં AB = AC અને XY એ ΔABC ના પરિવૃત્તને સ્પર્શક છે. દર્શાવો કે XY પાયા BC ને સમાંતર છે.

ઉકેલ: ΔABC, $AB = AC$

$\therefore \quad \angle 1 = \angle 2$

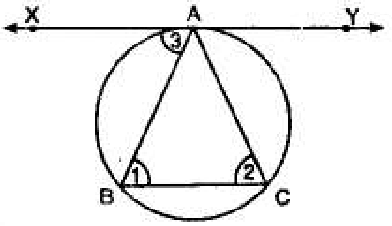
વળી XY એ A બિંદુએ વર્તુળનો સ્પર્શક છે.

$\therefore \quad \angle 3 = \angle 2$

$\therefore \quad \angle 1 = \angle 3$

પરંતુ આ યુગ્મકોણ છે.

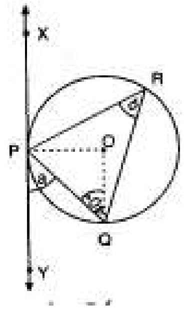
$\therefore \quad XY \parallel BC$



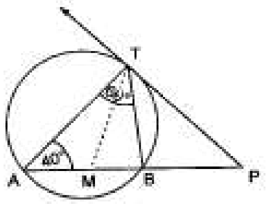
આકૃતિ . 17.25

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 17.3

1. વર્તુળના વિરિદ્ધ વૃત્તખંડમાં જીવા દ્વારા રચાતો કોણ આકૃત્તિ દ્વારા સમજાવો.
2. આકૃત્તિ 17.26માં XY એ O કેન્દ્રવાળા વર્તુળને P બિંદુ સ્પર્શે છે, જો $\angle OQP = 40^\circ$ હોય તો a અને b ની કિંમત શોધો.
3. આકૃત્તિ 17.27માં PT એ બાહ્ય બિંદુ P માંથી વર્તુળને સ્પર્શક છે વર્તુળની જીવા AB લંબાવવામાં આવે તો TP ને P માં મળે છે TA અને TB જોડવામાં આવે છે. અને TM એ $\angle ATB$ નો દ્વિભાજક છે.



આકૃતિ . 17.26



આકૃતિ .17.27

જો $\angle PAT = 40^\circ$ અને $\angle ATB = 60^\circ$, તો દર્શાવો કે PM = PT.

સારાંશ

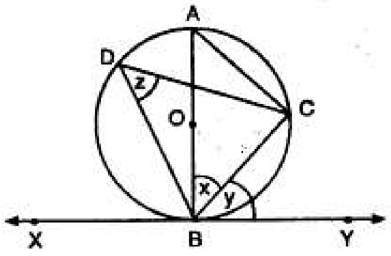
- વર્તુળને બે બિંદુઓમાં છેદતી રેખા વર્તુળની છેદિકા કહેવાય છે.
- વર્તુળને એક બિંદુએ સ્પર્શ કરતી રેખા વર્તુળને સ્પર્શક કહેવાય છે.
- સ્પર્શક એ છેદિકાની સીમાન્ત સ્થિતિ છે, જ્યારે બંને છેદિકાઓ એકકાર થાય છે.
- વર્તુળને સ્પર્શક એ સ્પર્શબિંદુ એ દોરીલી ત્રિજ્યાને લંબ છે.
- બાહ્ય બિંદુમાંથી વર્તુળને બે સ્પર્શક દોરી શકાય, જે સમાન લંઈના હોય છે.
- જો વર્તુળની બે જીવાઓ AB અને CD બિંદું P (વર્તુળની અંદર અથવા બહાર) એ એકબીજાને છેદે તો

  $PA \times PB = PC \times PD$
- જો PAB એ વર્તુળને A અને B બિંદુએ છેદતી વર્તુળની છેદિકા હોય અને PT એ વર્તુળને T બિંદુએ સ્પર્શક હોય તો,

  $PA \times PB = PT^2$
- વર્તુળના સ્પર્શકના સ્પર્શબિંદુએ દોરેલી જીવા દ્વારા વિરુદ્ધ વૃત્તખંડોમાં રચાતા કોણ જીવા અને સ્પર્શક વચ્ચેના કોણ જેવડો હોય છે.
- જો રેખા જીવા સાથે એવા કોણ રચે, જે જીવા દ્વારા , વિરિદ્ધ વૃત્તખંડમાં રચાતા કોણને અનુક્રમે બરાબર હોય તો તે રેખા વર્તુળનો સ્પર્શક હોય છે. ṭ

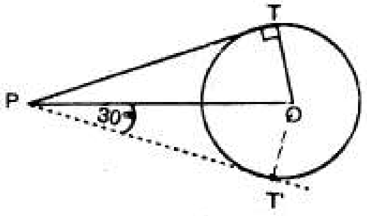
સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. આકૃતિમાં મદદથી વર્તુળની છેદિકા અને સ્પર્શ વચ્ચેનો તફાવત આપો.
2. પ્રવૃત્તિ દ્વારા દર્શાવો કે સ્પર્શક સ્પર્શ બિંદુએ દોરીલી ત્રિજ્યાને લંબરેખા છે.
3. આકૃત્તિ 17.28માં જો AC = BC અને AB એ તુંળમાં વ્યાસ છે. $\angle x$, $\angle y$ અને $\angle z$ શોધો,



આકૃતિ . 17.28

4. આકૃત્તિ 17.29માં OT = 7 સેમી અને OP = 25 સેમી, તો PT ની લંબાઈ શોધો. જો PT વર્તુળને બીજો સ્પર્શ હોય તો PT અને $\angle POT$ શોધો,

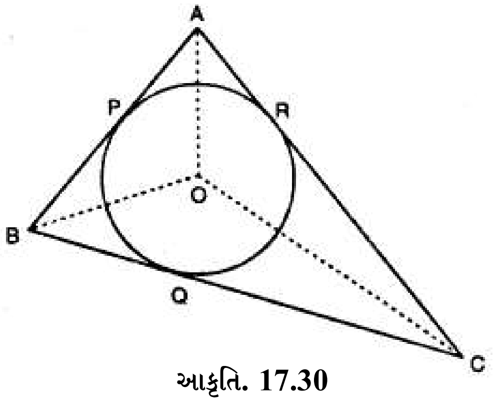


આકૃતિ. 17.29

5. આકૃત્તિ 17.30માં ΔABC ની પરિમિતિ 27 સેમી છે. જો PA = 4 સેમી, QB = 5 સેમી તો QC ની લંબાઈ શોધો.

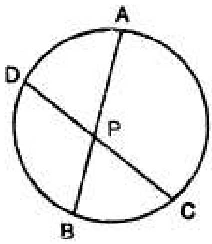
6. આકૃત્તિ 17.30માં જો $\angle ABC = 70^o$ તો $\angle BOC$ શોધો.

(સંકેત $\angle OBC + \angle OCB = \frac{1}{2}$ $(\angle ABC + \angle ACB)$



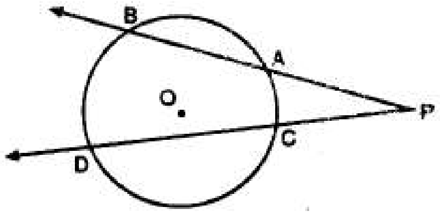
આકૃતિ. 17.30

7. આકૃત્તિ 17.31માં વર્તુળના અંદરના બિંદુ P આગળ છેદતી વર્તુળની બે જીવાઓ AB અને CD છે. જો PA = (x + 3) સેમી PB = (x – 3) સેમી અને PC = $5\frac{1}{3}$ સેમી તો, x શોધો.



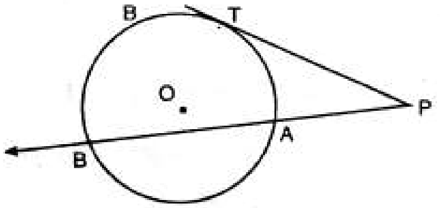
આકૃતિ. 17.31

8. આકૃત્તિ 17.32માં વવર્તુળની જીવાઓ BA અને DC વર્તુળની બહારના બિંદુ P આગળ છેદે છે. જો PA = 4 સેમી અને PB = 9 સેમી PC = x અને PD = 4x તો x ની કિંમત શોધો.



આકૃતિ 17.32

9. આકૃત્તિ 17.33 માં PAB એ છેદિકા છે, અને બાહ્ય બિંદુમાંથી PT એ વર્તુળને સ્પર્શક છે. જો PT = x સેમી PA = 4 સેમી અને AB = 5 સેમી, તો x શોધો,



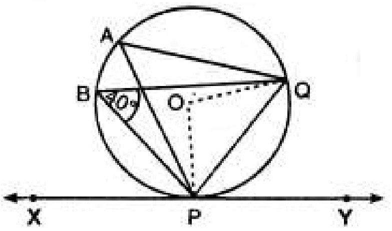
આકૃતિ 17.33

10. આકૃત્તિ 17.34 માં O વર્તુળનું કેન્દ્ર છે અને $\angle PBQ = 40^\circ$ નીચેના શોધો.

(i) $\angle QPY$

(ii) $\angle POQ$

(iii) $\angle OPQ$



આકૃતિ 17.34

ઉત્તરો

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 17.1

1. (i) લંબ (ii) સમાન (iii) છેદન બિંદુઓ
   (iv) બે (v) શૂન્ય
2. 50°, 50°
3. 3 સેમી

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 17.2

1. 4.3 સેમી 2. 3 સેમી 3. 8 સેમી
4. 10 સેમી 4. 6 સેમી

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 17.3

2. $\angle a = \angle b = 50^{\circ}$

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

3. $\angle X = \angle Y = \angle Z =$
4. PT = 24 cm; PT' = 24 cm, $\angle POT' = 60^{\circ}$
5. QC = 4.5 6. $\angle BOC = 125^{\circ}$
7. $x = 5$ 8. $x = 3$
9. $x = 6$
10. (i) 40° (ii) 80° (iii) 50°