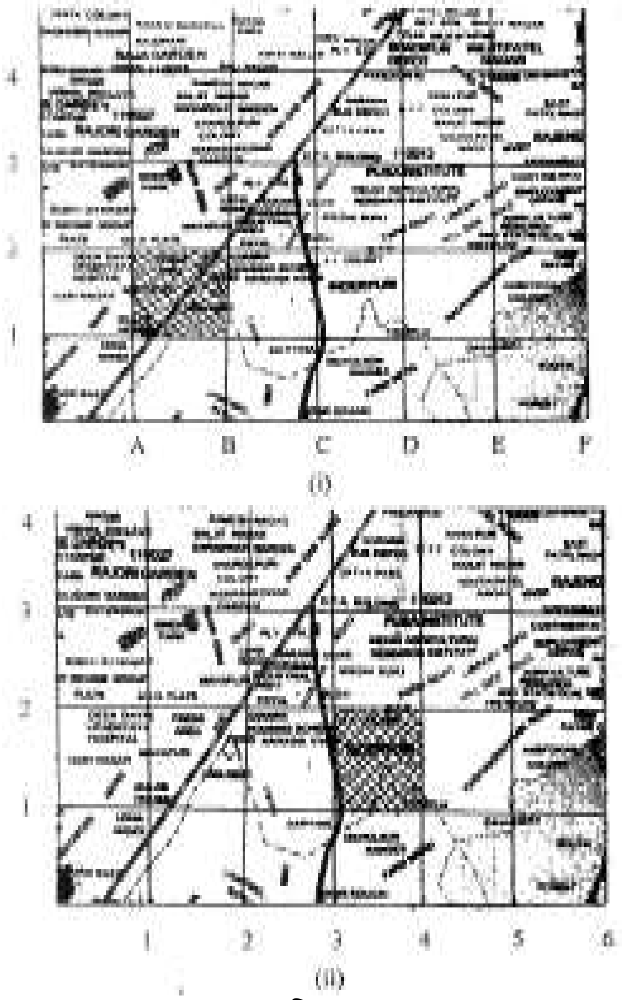
19

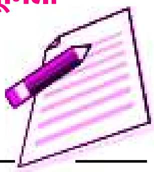
યામ ભૂમિતિ

પરિચય

કોઈ મોટા નકશામાં ગામ કે રસ્તો અને તેનું સ્થાન નક્કી કરવાના કૂટપ્રશ્નમાં સારી એવી ખોજ માંગી લે છે, પરંતુ નકશાને યોગ્ય કદવાળા ચોરસમાં વિભાજન કરવાથી આ કામગીરી સરળ કરી શકાય. દરેક ચોરસ એક અક્ષર અને એક સંખ્યા અથવા બે સંખ્યાઓ, જેમાંની એક નકશાનું સ્તંભોમાં ઊર્ધ્વ વિભાજન અને બીજી હારબંધ સમક્ષિતિજ વિભાજન સાથે સંબંધિત છે તે દ્વારા ઓળખાય છે.



આકૃતિ 19.1



ઉપરની આકૃતિ 19.1 (1) માં, આપણે નકશા પર છાયાંક્તિ ચોરસ સંકેત (કોડ) (B, 2) અથવા (4, 2) દ્વારા દર્શાવી શકીએ. (જુઓ આકૃતિ 19.1 (2)). સંકેત માટે વપરાતું સંખ્યાયુગ્મ ક્રમયુક્ત યુગ્મ કહેવાય છે. જો આપણે અમુક શહેરનું સંકેતીકરણ જાણીએ તો નકશા પર છાયાંક્તિ ચોરસમાં તેનું સ્થાન દર્શાવી શકીએ. તો પણ આપણે તેનું ચોક્કસ સ્થાન જાણી ન શકીએ. સમતલમાં અતિ ચોક્કસપણે બિંદુનું સ્થાન નક્કી કરવાની પદ્ધતિ ફ્રેંચ ગણિતશાસ્ત્રી અને દાર્શનિક રેને ડેસ્કાટ (15-96-1650) એ આપી.

આમાં, સમતલમાં બિંદુ સંખ્યાઓના ક્રમયુક્ત યુગ્મ વડે દર્શાવાય છે, જેને બિંદુના કાર્તેઝિય યામ કહે છે.

આ પાઠમાં આપણે બિંદુના કાર્તેઝિય યામ સમતલમાં બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર અને ત્રિકોણના ગુરુત્વકેન્દ્રનું વિભાગીય સૂત્ર તેમજ યામ વિશે વિસ્તારથી શીખીશું.

હેતુઓ

આ પાઠ શીખ્યા પછી, અધ્યેતા :

- સમતલમાં જુદાં જુદા બિંદુઓનું સ્થાન નક્કી કરી શકાશે.
- જેમનાં યામ આપ્યાં હોય તેવાં બે જુદા જુદાં બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર શોધી શકશે.
- બિંદુ કે જે બે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડને આંતરિક રીતે આપેલ ગુણોત્તરમાં વિભાગે છે તેના યામ શોધી શકશે.
- બે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુંના યામ શોધી શકશે.
- આપેલ શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણના ગુરુત્વકેન્દ્રના યામ શોધી શકશે.
- ઉપરની સંકલ્પનાઓ પર આધારિત કૂટપ્રશ્નો ઉકેલી શકશે.

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

- સંખ્યા રેખાનો ખ્યાલ
- સંખ્યાઓ પર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ
- કાટકોણ ત્રિકોણના ગુણધર્મ

19.1 યામ પદ્ધતિ

તમે પાઠ 5 માં બે ચલ સુરેખ સમીકરણનો આલેખ દોરતાં શીખી ગયા છો.

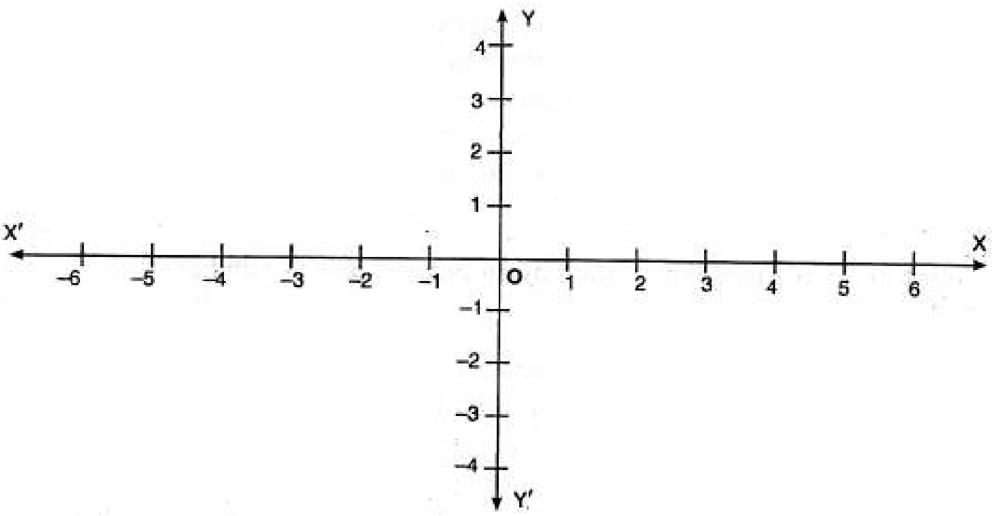
સમતલમાં કોઈ એક બિંદુનું સ્થાન બે સદંર્ભ ધરીઓથી તેના અંતરના સંદર્ભમાં નક્કી કરવામાં આવે છે. આ ધરીઓ સામાન્ય રીતે અંકિત સંખ્યા રેખાઓ XOX' અને YOY' જે O બિંદુ આગળ એકબીજાને કાટખૂણે છે તે રીતે દોરવામાં આવે છે. (જુઓ આ. 19.2)

સમક્ષિતિજ આડી સંખ્યા રેખા XOX', x- ધરી (અક્ષ) કહેવાય છે અને ઊર્ધ્વ-ઊભી સંખ્યા રેખા YOY',

Y- ધરી કહેવાય છે. બંને ધરી એકબીજીને બિંદુ O માં છેદે છે તેને ઉગમ (કે ઊગમ) બિંદુ કહે છે. બન્ને ધરીઓવાળી પદ્ધતિને લંબચોરસીય યામ પદ્ધતિ કહે છે.

નોંધી લઈએ કે, x - ધરીની ધન દિશા ઉગમ બિંદુ O થી જમણી તરફ OX એમ અને ઋણ દિશા ઉગમ બિંદુ O થી ડાબી તરફ OX' એમ લેવામાં આવે છે.

તે જ પ્રમાણે ઉગમ બિંદુ O થી ઉપરનો y - ધરીનો ભાગ અર્થાત્ બાજુ OY ધન તરીકે ગણવામાં આવે છે. અને ઉગમ બિંદુ O થી નીચેનો ભાગ અર્થાત્ બાજુ OY' ઋણ તરીકે ગણવામાં આવે છે.



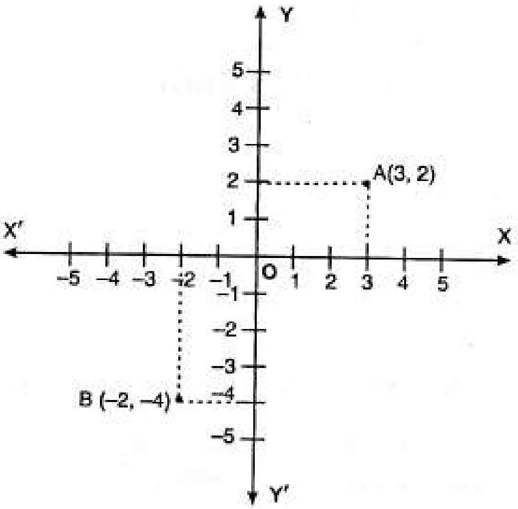
આકૃતિ 19.2

19.2 બિંદુના યામ

બિંદુનું સ્થાન બે સંખ્યાઓ જેમને યામ કહે છે તે દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે, જે બે ધરીઓથી બિંદુના અંતર દ્વારા નિર્ધારિત થાય છે. પરિપાટી મુજબ, પ્રથમ સંખ્યા x- યામ (કોટિ) હંમેશાં y ધરીથી અંતર દર્શાવે છે અને બીજી સંખ્યા y યામ (ભુજ) x ધરીથી અંતર દર્શાવે છે.

ઉપરની આકૃતિ 19.3 માં, બિંદુઓ A અને B નાં યામ અનુક્રમે (3, 2) અને (-2, -4) છે.

તમે કહી શકો કે બિંદુ A(3, 2) નું y ધરીથી અંતર 3 એકમ છે અને x ધરીથી 2 એકમ છે. પરિપાટી મુજબ બિંદુનાં યામ ક્રમયુક્ત



આકૃતિ 19.3

યુગ્મ તરીકે લખાયર છે. અર્થાત્ (x યામ, y યામ)

બિંદુ A (3, 2) પરથી એ સ્પષ્ટ છે કે x યામ 3 છે અને y યામ 2 છે. તે જ પ્રમાણે બિંદુ B (-2, -4) ના x યામ અને y યામ અનુક્રમે (2) અને (-4) છે.

સામાન્યત : બિંદુ P(x, y) ના યામમાં એવુ ગર્ભિત છે કે y ધરીથી P નું અંતર x એકમ છે અને x ધરીથી તેનું y એકમ છે.

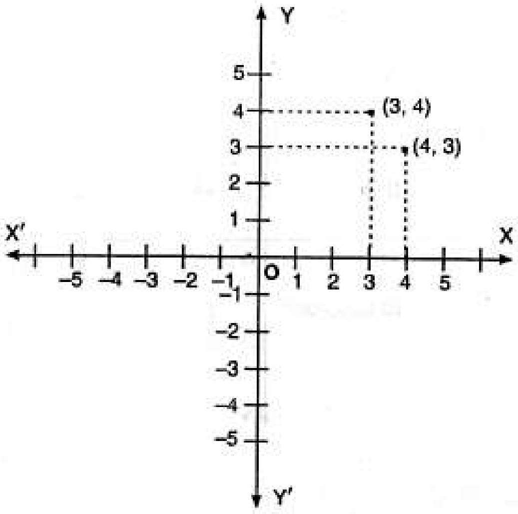
ધ્યાન રાખો કે ઉગમ બિંદુ O ના યામ (0, 0) છે. x ધરી પર દરેક બિંદુના y યામ 0 છે અને y ધરી પર દરેક બિંદુના x યામ 0 છે.

સામાન્યત : x ધરી પર ઉગમ બિંદુની જમણી તરફ આવેલ દરેક બિંદુના યામ (a, 0) છે અને ડાબી તરફના બિંદુના યામ (-a, 0) છે, જ્યાં a શૂન્યેતર ધન સંખ્યા છે.

તે જ પ્રમાણે y ધરી પર x ધરીની ઉપરના તથા નીચેના કોઈ બિંદુના y યામ અનુક્રમે (0, b) અને (0, -b) હશે, જ્યાં b એ શૂન્યેતર ધન સંખ્યા છે.

તે એ પણ ધ્યાન રાખો કે લંબચોરસીય યામ પદ્ધતિમાં બિંદુઓ (x, y) અને (y, x) ના સ્થાન સમાન નથી.

ઉદાહરણાર્થ, બિંદુઓ (3, 4) અને (4, 3) નાં સ્થાન આકૃતિ 19.4 દર્શાવવામાં આવેલ છે.



આકૃતિ 19.4

ઉદાહરણ 19.1 : નીચેના દરેક બિંદુમાં x અને y યામ લખો.

(અ) (1, 1) (બ) (-3, 2) (ક) (-7, -5) (ડ) (2, -6)

ઉકેલ (અ) x યામ 1 છે.
y યામ 1 છે.

(બ) x યામ -3 છે.
y યામ 2 છે.

(ક) x યામ -7 છે.
y યામ -5 છે.

(ડ) x યામ 2 છે.
y યામ -6 છે.

ઉદાહરણ 19.2 : નીચેના દરેક બિંદુ માટે y અને x ધરીથી અનુક્રમે અંતરે લખો :

(અ) A (3, 4) (બ) B (-5, 1) (ક) C (-3, -3) (ડ) D (8, -9)

ઉકેલ : (અ) y ધરીથી બિંદુ A નું અંતર 3 એકમ છે અને x ધરીથી 4 એકમ છે.

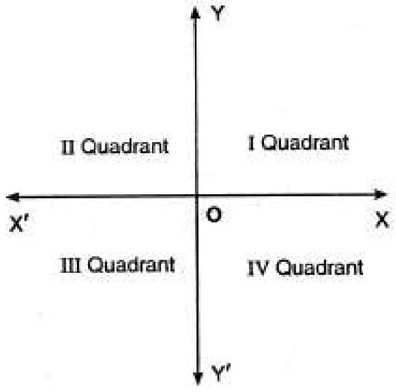
(બ) y ધરીથી બિંદુ B નું અંતર ઉગમ બિંદુથી ડાબી તરફ 5 છે અને x ધરીથી 1 એકમ છે.

(ક) y ધરીથી બિંદુ c નું અંતર ઉગમ બિંદુંની ડાબી તરફ 3 એકમ છે અને x ધરીથી ઉગમ બિંદુથી નીચે 3 એકમ છે.

(ડ) y ધરીથી બિંદુ D નું અંતર ઉગમ બિંદુની જમણી તરફ 8 અકમ છે અને x ધરીથી ઉગમ બિંદુથી નીચે 9 એકમ છે.

19.3 ચરણ અથવા પાદ (ચતુર્થાંશ)

બે ધરીઓ XOX' અને YOY' સમતલને ચાર ભાગમાં વિભાગે છે, જેમને ચરણ કહે છે.



આકૃતિ 19.5

ચાર ચરણ (જુઓ આકૃતિ 19.5) ના નામ પરથી પ્રમાણે છે.

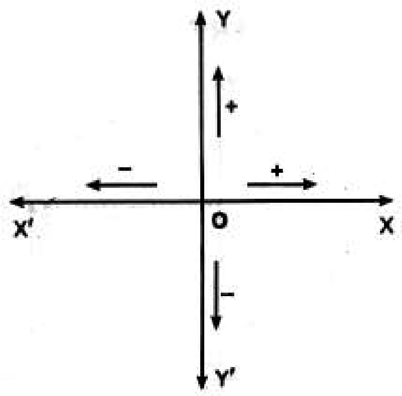
XOY : I ચરણ　　YOX' : II ચરણ

X'OY' : III ચરણ　　Y'OX : IV ચરણ

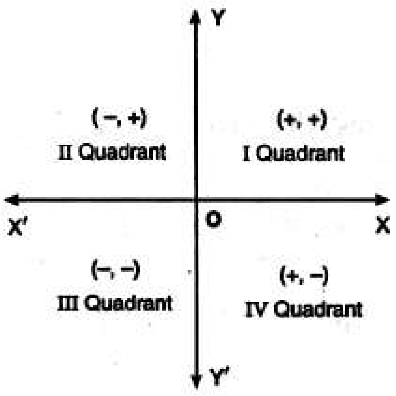
વિભાગ 19.4માં આપણે ચર્ચા કરી ગયા કે

1. x ધરી પર ઉગમબિંદુની જમણી તરફ ધન દિશા અને ડાબી તરફ ઋણ દિશા ગણાય છે.

2. y ધરી માટે-- ધરી પરનો ભાગ ધન અને x ધરીની નીચેનો ભાગ ઋણ ગણવામાં આવે છે. (જુઓ આકૃતિ 19.6)



આકૃતિ 19.6



આકૃતિ 19.7

તેથી, પ્રથમ ચરણમાં તમામ બિંદુઓના યામ (+, +) પ્રકારના છે. (જુઓ આકૃતિ 19.7)

બીજા ચરણમાં કોઈ પણ બિંદુના x યામ ઋણ અને y યામ ધન હોય છે. (-, +)

તે જ પ્રમાણે ત્રીજા ચરણમાં બિંદુના બંને x અને y યામ ઋણ હોય છે. (-, -) અને ચોથા ચરણમાં બિંદુના x યામ ધન અને y યામ ઋણ હોય છે. (+, -)

ઉદાહરણાર્થે :

(અ) P (5, 6)ના બંને x અને y યામ ધન હોઈ, તે પ્રથમ ચરણમાં પડે છે.

(બ) Q (-3, 4) x યામ ઋણ અને y યામ ધન હોઈ તે બીજા ચરણમાં પડે છે.

(ક) R (-2, -3)ના બંને x અને y યામ ઋણ હોઈ, તે ત્રીજા ચરણમાં પડે છે.

(ડ) S (4, -1)ના x યામ ધન અને y યામ ઋણ હોઈ તે ચોથા ચરણમાં પડે છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 19.1

1. નીચેના દરેક બિંદુનાં x અને y યામ લખો.

   (અ) (3, 3) (બ) (–6, 5) (ક) (–1, –3) (ક) (4, –2)

2. નીચેના દરેક બિંદુના y અને x ધરીથી અંતરો અનુક્રમે લખો.

   (અ) A (2, 4) (બ) B (–2, 4) (ક) C (–2, –4) (ડ) D (2, –4)

3. નીચેના દરેક બિંદુને ચરણદીઠ જૂથમાં ગોઠવો

(A)(–3, 2), (B) (2, 3), (C)(7, -6), (D)(1, 1), (E)(–9, –9),
(F)(–6, 1), (G) (–4, –5) (H)(11, –3), (I)(3, 12), (J)(–13, 6),

19.4 જેના યામ આપેલ હોય તેવા બિંદુનું આલેખન

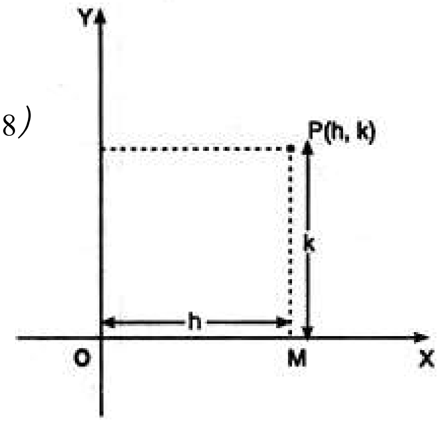
ધરીઓથી અંતરો માપીને બિંદુને આલેખિત કરી શકાય. આમ કોઈ પણ બિંદુ (h, k) નીચે પ્રમાણે આલેખિત કરી શકાય

(1) x ધરી પર h ને સમાન OM માપો. (જુઓ આકૃતિ 19.8)

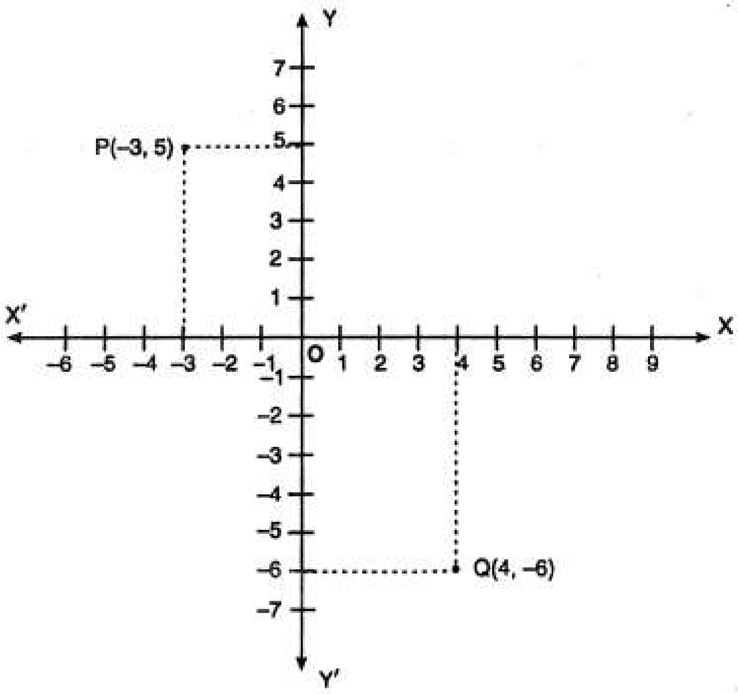
(2) OM ને લંબ હોય અને k ને સમાન MP માપો

બંને કિસ્સામાં સંજ્ઞાનો નિયમ અનુસરો.

ઉદાહરણાર્થ, (-3, 5) અને (4, -6) બિંદુઓ આકૃતિ 19.9માં દર્શાવ્યા મુજબ આલેખિત થશે.



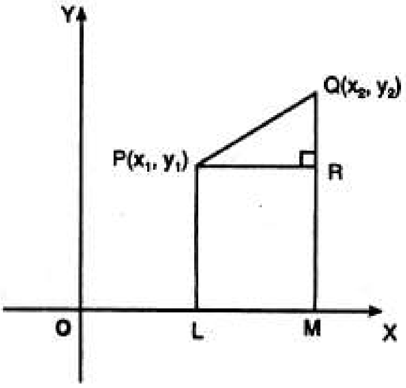
આકૃતિ 19.8



આકૃતિ 19.9

નોંધ

19.5 બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર



આકૃતિ. 19.10

સમતલમાં કોઈ બે બિંદુઓ P(x_1 y_1) અને Q(x_2 y_2) વચ્ચેનું અંતર એ રેખાખંડ PQ ની લંબાઈ છે.

P અને Q માંથી x ધરીને લંબ PL અને QM દોરો અને PR, GM ને લંબ દોરો.

તો, $OL = x_1$, $Om = x_2$, $PL = y_1$ અને $QM = y_2$

$\therefore \quad PR = LM = OM - OL = x_2 - x_1$

$QR = QM - RM = QM - PL = y_2 - y_1$

PQR *કાટકોણ ત્રિકોણ છે.*

$$\therefore \quad PQ^2 = PR^2 + QR^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad \text{(પાયથાગોરસના પ્રમેય પ્રમાણે)}$$

$$\therefore \quad PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર $= \sqrt{(\textbf{difference of abscissae})^2 + (\textbf{difference of ordinates})^2}$

ઉપસિદ્ધાંત : ઉગમબિંદુ (0, 0) થી બિંદુ (x_1, y_1) નું અંતર છે.

$$\sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}$$

તે દર્શાવવા કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 19.3 : *નીચેનાં બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર શોધો :*

(a) P(6, 8) અને Q(–9, –12)

(b) A(–6, –1) અને B(–6, 11)

ઉકેલ :

(a) *અહીં બિંદુઓ* P (6, 8) *અને* Q (-9, -12) *છે. અંતરના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,*

$$PQ = \sqrt{(-9-6)^2 + \{(-12-8)\}^2}$$

$$= \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{225 + 400} = \sqrt{625} = 25$$

તેથી PQ = 25 એકમ

(b) અહીં બિંદુઓ A(–6, –1) અને B(–6, 11) છે. અંતરના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$AB = \sqrt{\{-6-(-6)\}^2 + \{11-(-1)\}^2}$$

$$= \sqrt{0^2 + 12^2} = 12$$

તેથી AB = 12 એકમ

ઉદાહરણ 19.4: બે બિંદુઓ (0, 0) અને (x, 3) વચ્ચેનું અંતર 5 છે. x શોધો.

ઉકેલ : અંતરના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં, (0, 0) અને (x, 3) વચ્ચેનું અંતર

$$\sqrt{(x-0)^2 + (3-0)^2}$$ મળે છે.

આપેલ છે કે

$$\sqrt{(x-0)^2 + (3-0)^2} = 5$$

અથવા $\sqrt{x^2 + 3^2} = 5$

બંને બાજુઓના વર્ગ કરતાં

$x^2 + 9 = 25$

અથવા $x^2 = 16$

અથવા $x = \pm 4$

તેથી $x = +4$ અથવા -4

ઉદાહરણ 19.5 : દર્શાવો કે બિંદુઓ (1, 1), (3, 0) અને (–1, 2) રેખીય છે.

ઉકેલ : P(1, 1), Q(3, 0) અને R (-1, 2) આપેલ બિંદુઓ છે.

હવે, $PQ + RP = \left(\sqrt{5} + \sqrt{5}\right)$ એકમ $= 2\sqrt{5}$ એકમ $= QR$

P, Q અને R રેખીય બિંદુઓ છે અને P બિંદુ Q અને R ની વચ્ચે છે.

ઉદાહરણ 19.6 : વર્તુળ કે જેનું કેન્દ્ર (0, 0) પર હોય અને જે બિંદુ (-6, 8) માંથી પસાર થતું હોય, તેની ત્રિજ્યા શોધો.

ઉકેલ : A (0, 0) અને B (–6, 8) આપેલ બિંદુઓ છે.

હવે, વર્તુળની ત્રિજ્યા રેખાખંડ AB ના અંતર જેટલી છે.

$$\therefore \quad OB = \sqrt{(-6-0)^2 + (8-0)^2}$$

$$= \sqrt{36+64} = \sqrt{100}$$

$$= 10$$

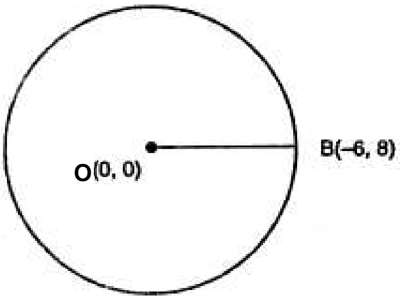


Fig. 19.11

તેથી વર્તુળની ત્રિજ્યા 10 એકમ છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 19.2

1. નીચેનાં બિંદુઓની દરેક જોડ વચ્ચેનું અંતર શોધો
   (અ) (3, 2) અને (11, 8) (બ) (–1, 0) અને (0, 3)
   (ક) (3, –4) અને (8, 5) (ડ) (2, –11) અને (–9, –3)
2. વર્તુળ કે જેનું કેન્દ્ર (2, 0) પર છે અને જે (7, -12) બિંદુમાંથી પસાર થતું હોય તેની ત્રિજ્યા શોધો.
3. દર્શાવો કે બિંદુઓ (–5, 6), (–1, 2) અને (2, –1) રેખીય છે.

19.6 છેદ સૂત્ર

બે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડને આપેલ ગુણોત્તરમાં આંતરિક રીતે વિભાગતા બિંદુના યામ શોધવા

ધારો કે $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ બે આપેલ બિંદુઓ છે અને P(x, y) એ AB પર એવું બિંદુ છે જે તેને આપેલ ગુણોત્તર m : n માં વિભાગ છે.

આપણે P ના યામ શોધવાનાં છે.

AL, PM, BN એ OX પર અને AK, PT અનુક્રમે PM અને BN પર લંબ દોરો. તો, સરૂપ ત્રિકોણો APK અને PBT માંથી આપણને મળે છે.

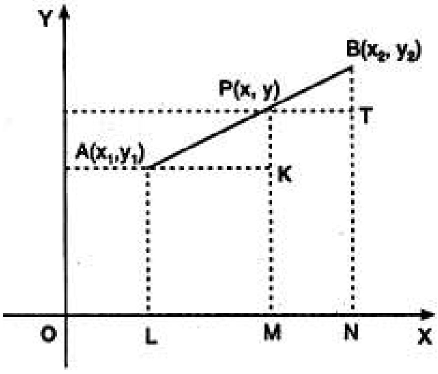


Fig. 19.12

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AK}{PT} = \frac{KP}{TB} \qquad ...(૧)$$

હવે, $AK = LM = OM - OL = x - x_1$

$PT = MN = ON - OM = x_2 - x$

$KP = MP - MK = MP - LA = y - y_1$

$TB = NB - NT = NB - MP = y_2 - y$

(1) પરથી આપણને મળે છે :

$$\frac{m}{n} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

પ્રથમ બે સંબંધોમાંથી,

$$\frac{m}{n} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

અથવા $mx_2 - mx = nx - nx_1$

અથવા $x(m + n) = mx_2 + nx_1$

અથવા $x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$

તે જ પ્રમાણે $\frac{AP}{PB} = \frac{KP}{TB}$, સંબંધી પરથી,

$\frac{m}{n} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$ જેને સાદું રૂપ આપતાં,

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$$

$\therefore \quad x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$, and $y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$ ...(i)

અહીં બિંદુ કે જે (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડને m:n ગુણોત્તરમાં આંતરિક રીતે વિભાગ છે તેનાં યામ આ પ્રમાણે છે. :

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$$

19.9.1 મધ્યબિંદુ સૂત્ર

બે બિંદુઓ (x_1, y_1) *અને* (x_2, y_2) *જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુના યામ ઉપરના છેદ સૂત્રમાં* m=n *લઈને મેળવી શકાય છે.*

ઉપર (1) માં $m = n$ *મૂકતાં*

$$x = \frac{nx_2 + nx_1}{n + n} = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

અને $$y = \frac{ny_2 + ny_1}{n + n} = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

બે બિંદુઓ (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુના યામ આ પ્રમાણે છે.

$$\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$$

આ દર્શાવતા આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 19.7 : *બિંદુ જે નીચેનાં બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડને આપેલ ગુણોત્તરમાં વિભાગે છે તેનાં યામ શોધો :*

(a) (2, 3) *અને* (7, 8) 2 : 3 *ગુણોત્તરમાં આંતરિક રીતે*

(b) (–1, 4) *અને* (0, –3) 1 : 4 *ગુણોત્તરમાં આંતરિક રીતે*

ઉકેલ : (a) *ધારો કે* A (2, 3) *અને* B (7, 8) *આપેલ બિંદુઓ છે.*

ધારો કે P (x, y) AB *ને ગુણોત્તર* 2:3 *માં આંતરિક રીતે વિભાગે છે.*

છેદ સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$x = \frac{2 \times 7 + 3 \times 2}{2 + 3} = \frac{20}{5} = 4$$

અને $$y = \frac{2 \times 8 + 3 \times 3}{2 + 3} = \frac{25}{5} = 5$$

P (4, 5) AB *ને ગુણોત્તર* 2 : 3 *માં આંતરિક રીતે વિભાગે છે.*

(b) *ધારો કે* A (–1, 4) *અને* B (0, –3) *આપેલ બિંદુઓ છે.*

ધારો કે P (x, y) AB *ને ગુણોત્તર* 1:4 *માં આંતરિક રીતે વિભાગે છે.*

છેદ સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$x = \frac{1\times 0 + 4\times(-1)}{1+4} = -\frac{4}{5}$$

અને $$y = \frac{1\times(-3)+4\times 4}{1+4} = \frac{13}{5}$$

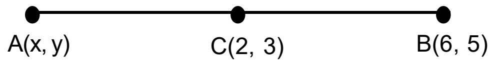
$\therefore P\left(-\frac{4}{5},\frac{13}{5}\right)$ AB ને ગુણોત્તર 1:4માં આંતરિક રીતે વિભાગે છે.

ઉદાહરણ 19.8 : બે બિંદુઓ (3, 4) અને (5, 12)ને જોડતા રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે A (3, 4) અને B (5, 12) આપેલ બિંદુઓ છે.

ધારો કે C(x, y) AB નું મધ્યબિંદુ છે. મધ્યબિંદુ સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$x = \frac{3+5}{2} = 4$$



અને $$y = \frac{4+12}{2} = 8$$

બિંદુઓ (3, 4) અને (5, 12)ને જોડતા રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ (4, 8) છે.

ઉદાહરણ 19.9 : રેખાખંડના મધ્યબિંદુના યામ (2,3) છે. જો રેખાખંડના એક અંત્યબિંદુના યામ (6, 5) હોય, તો બીજા અંત્યબિંદુના યામ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે રેખાખંડનું એક અંત્યબિંદુ B (6, 5) અને બીજું અંત્યબિંદુ A(x, y) છે.

C (2, 3) એ AB નું મધ્યબિંદુ છે.

આપણે લખી શકીએ કે :

$$2 = \frac{x+6}{2} \quad \text{અને} \quad 3 = \frac{y+5}{2}$$

અથવા $4 = x + 6$ અથવા $6 = y + 5$

અથવા $x = -2$ અથવા $y = 1$

બીજા અંત્યબિંદુના યામ (-2, 1) છે.

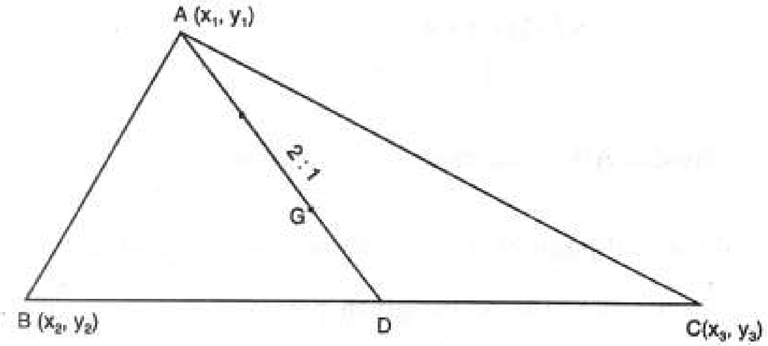
19.7 ત્રિકોણનું ગુરુત્વકેન્દ્ર (અથવા મધ્યકેન્દ્ર)

જેનાં શિરોબિંદુઓ આપેલ હોય, તેવા ત્રિકોણના ગુરુત્વકેન્દ્રના યામ શોધવા.

વ્યાખ્યા : ત્રિકોણનું ગુરુત્વકેન્દ્ર એ તેની મધ્યગાઓનું સંગમ બિંદુ છે અને તે દરેક મધ્યગાને 2:1 ગુણોત્તરમાં વિભાગે છે.

ધારો કે $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ અને $C(x_3, y_3)$ ત્રિકોણ ABC નાં શિરોબિંદુઓ છે. ધારો કે AD મધ્યગા છે, જે પાયાને દ્વિભાગે છે. તો, મધ્યબિંદુ સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$D = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$



આકૃતિ 19.14

હવે, AD ઉપર બિંદુ G, જે તેને અંતઃ ગુણોત્તર 2:1 માં દ્વિભાગે છે તે ગુરુત્વકેન્દ્ર છે. જો (x, y) એ G ના યામ હોય, તો

$$x = \frac{2 \times \frac{x_2 + x_3}{2} + 1 \times x_1}{2+1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{2 \times \frac{y_2 + y_3}{2} + 1 \times y_1}{2+1} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

તેથી ગુરુત્વકેન્દ્રના યામ આ પ્રમાણે હોય :

$$\left(\frac{\mathbf{x_1 + x_2 + x_3}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{y_1 + y_2 + y_3}}{\mathbf{3}}\right)$$

ઉદાહરણ 19.10 : ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓના યામ (3, -1), (10, 7) અને (5, 3) છે. તો ગુરુત્વકેન્દ્રના યામ શોધો

ઉકેલ : ધારો કે A (3, -1), B (10, 7) અને C (5, 3) ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓ છે. ધારો કે G(x, y) તેનું ગુરુત્વકેન્દ્ર છે.

તો, $x = \dfrac{3 + 10 + 5}{3} = 6$

અને $y = \frac{-1+7+3}{3} = 3$

તેથી, ગુરુત્વકેન્દ્રનાં યામ (6, 3) છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 19.3

1. બિંદુ કે જે નીચે પ્રમાણે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડને આંતરિક રીતે વિભાગે છે તેનાં યામ શોધો :

   (a) (1, –2) અને (4, 7) ગુણોત્તર 1 : 2 માં

   (b) (3, –2) અને (–4, 5) ગુણોત્તર 1 : 1 માં

2. નીચે પ્રમાણેનાં બિંદુઓને જોડત રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ શોધો :

   (a) (0, 0) અને (8, –5)

   (b) (–7, 0) અને (0, 10)

3. ત્રિકોણ કે જેનાં શિરોબિંદુઓ (5, –1), (–3, –2) અને (–1, 8) હોય, તેનું ગુરુત્વકેન્દ્ર શોધો.

સારાંશ :

- જો કોઈ બિંદુનાં યામ (2, 3) હોય, તો x યામ (અથવા કોટિ) 2 છે અને y યામ (અથવા ભુજ) 3 છે.
- કોઈ યામ (x, y) માં, 'x', y ધરીથી અંતર દર્શાવે છે અને 'y', x ધરીથી અંતર દર્શાવે છે.
- ઉગમબિંદુના યામ (0, 0) હોય છે.
- x ધરી પર દરેક બિંદુના y યામ 0 હોય, અને y ધરી પર દરેક બિંદુના x યામ 0 હોય.
- બે ધરીઓ XOX' અને YOY' સમતલને ચાર ભાગમાં વિભાગે છે, જેમને પાદ (ચરણ) કહે છે.
- બે બિંદુઓ (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડનું અંતર આ પ્રમાણે અપાય છે.

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- ઉગમબિંદુ (0, 0) થી બિંદુ (x_1, y_1) નું અંતર $\sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}}$ છે.
- બિંદુ કે જે બે બિંદુઓ (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડનું અંતઃવિભાજન m : n ગુણોત્તરમાં

કરે છે તે આ પ્રમાણે આપવામાં આવે છે :

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$$

- બે બિંદુઓ (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુના યામ આ પ્રમાણે છે.

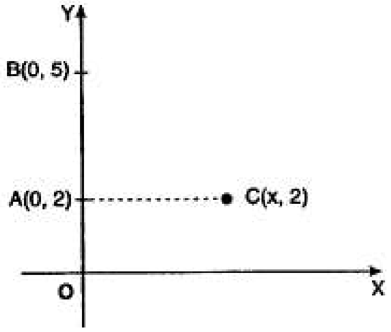
$$\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$$

- ત્રિકોણ કે જેનાં શિરોબિંદુઓ (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) છે તેના ગુરુત્વકેન્દ્રના યામ આ પ્રમાણે હોય છે.

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. આકૃતિ 19.15 માં AB = BC તો x શોધો.



આકૃતિ 19.15

2. બે બિંદુઓ (2, 3) અને (4, x) ને જોડતા રેખાખંડની લંબાઈ $\sqrt{13}$ એકમ છે. x શોધો.
3. ત્રિકોણ કે જેનાં શિરોબિંદુઓ A(3, 4), B(2, -1) અને C(4, -6) હોય, તેની બાજુઓની લંબાઈ શોધો.
4. સાબિત કરો કે (2, -2), (-2, 1) અને (5, 2) કાટકોણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.
5. (2, -1) અને (-3, 4) ને જોડતા રેખાખંડને અંતઃ 2:3 ગુણોત્તરમાં વિભાગે તેના યામ શોધો.
6. વ્યાસનાં અંત્યબિંદુઓ P(-5, 7) અને Q(3, -11) હોય તેવા વર્તુળનું કેન્દ્ર શોધો.
7. શિરોબિંદુઓ P(-2, 4), Q(7, -3) અને R(4, 5) હોય, તેવા ત્રિકોણનું ગુરુત્વકેન્દ્ર શોધો.

નોંધ

ઉત્તરો

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 19.1

1. (a) 3; 3 (b) –6; 5 (c) –1; –3 (d) 4; –2
2. (a) 2 એકમ; 4 એકમ
   (b) ઉગમબિંદુની ડાબી બાજુએ 2 એકમ, x ધરીથી 4 એકમ
   (c) ઉગમબિંદુની ડાબી બાજુએ 2 એકમ, ઉગમબિંદુથી નીચે 4 એકમ
   (d) 2 એકમ; ઉગમબિંદુથી નીચે 4 એકમ
3. પાદ I: B(2, 3), D(1, 1) અને P(3, 12)
   પાદ II: A(ß, 2), F(–6, 1) અને Q(–13, 6)
   પાદ III: E(–9, –9) અને G(–4, –5)
   પાદ IV: C(7, –6) અને H(11, –3)

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 19.2

1. (a) 10 એકમ (b) $\sqrt{10}$ એકમ (c) $\sqrt{106}$ એકમ (d) $\sqrt{185}$ એકમ
2. 13 એકમ

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 19.3

1. (a) (2, 1) (b) (–1, 1)
2. (a) $\left(4, -\frac{5}{2}\right)$ (b) $\left(-\frac{7}{2}, 5\right)$
3. $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. 3 એકમ 2. 0 અથવા 6
3. AB = $\sqrt{26}$ એકમ, BC = $\sqrt{29}$ એકમ અને = $\sqrt{101}$ એકમ
5. (0, 1) 6. (–1, –2) 7. (3, 2)