22

ત્રિકોણમિતિનો પરિચય

પરિચય

ગણિતશાસ્ત્રમાં ત્રિકોણોનો અભ્યાસ મહત્ત્વનું સ્થાન ધરાવે છે. ત્રિકોણ ન્યૂનતમ સંખ્યાની (ત્રણ) બાજુઓથી બનતી બંધ આકૃતિ હોવાથી સીધી રેખાઓ કે રેખાખંડો દ્વારા ઘેરાયેલી કોઈપણ બંધ આકૃતિઓના અભ્યાસમાં એક એકમની ગરજ સારે છે. ત જ રીતે કાટકોણ ત્રિકોણોનો ઉપયોગ કરીને વર્તુળોનો અભ્યાસ સરળતાથી થઈ શકે છે.

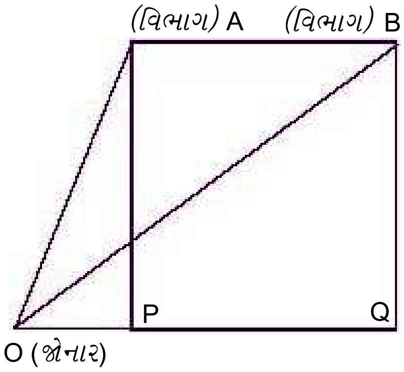
ભૂમિતિમાં આપણે ત્રિકોણોનો અભ્યાસ કર્યો હતો. તેમાં ત્રિકોણો વિશેના ઘણા પરિણામો અંગે આપણે કેટલાંક વિધાનો દ્વારા રજૂઆત કરી હતી પરંતુ ત્રિકોણમિતિનો અભ્યાસ કરવાની આપણી રીત સરળ, સચોટ અને જરા જુદી રીતની રહેશે. તેમાં મોટા ભાગના પરિણામો સૂત્રો દ્વારા રજૂ થશે. ત્રિકોણમિતિમાં અભ્યાસનું કેન્દ્રબિંદુ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

કાટકોણ ત્રિકોણની રચનાઓનો ઉપયોગ થતો હોય, તેવી કેટલીક પરિસ્થિતિઓ આપણે જોઈએ

તમે નાળિયેરીનું ઊંચું વૃક્ષ જોયું છે ? તેને જોતાં જ તેની ઊંચાઈ કેટલી હશે તેવા વિચાર આપણા મનમાં ઉદ્‌ભવ છે. તેની ઊંચાઈ માપ્યા સિવાય તમે કહી શકો ખરા કે તે કેટલું ઊંચું છે ? તે વૃક્ષની ટોચ અને તેને જોતી આપણી આંખની દૃષ્ટિથી બનતી રેખા, આપણી આંખમાંથી પસાર થતી સમક્ષિતિજ રેખા તથા વૃક્ષની ટોચમાંથી પસાર થતી અને સમક્ષિતિજ રેખા કઉપર લંબ થતી શિરોલંબ રેખા દ્વારા એક કાટકોણ ત્રિકોણ રચાય છે.

બીજું દૃષ્ટાંત જોઈએ.

તમે પતંગ ઉડાડો છો એવી કલ્પના કરો. પતંગ જ્યારે આકાશમાં ઉડતી હોય, ત્યારે તમે તેની ઉંચાઈ નક્કી કરી શકો છો ? અહીં પણ પતંગને જોતી તમારી આંખની દૃષ્ટિ-રેખા, આંખના દૃષ્ટિ-બિંદુમાંથી પસાર થતી સમક્ષિતિજ રેખા અને પતંગમાંથી પસાર થતી શિરોલંબ રેખાથી રચાતા કાટકોણ ત્રિકોણની કલ્પના આપણે કરી શકીએ છીએ.



આકૃતિ **22.1**

આપણે એક અન્ય પરિસ્થિતિનો વિચાર કરીએ. જેમાં એક વ્યક્તિ કોઈ નદીના કિનારે ઊભી હોય અને બીજા કિનારે આવેલા એક મંદિરને જોઈ રહી હોય. જો મંદિરની ઊંચાઈ

નોંધ

જાણતા હોઈએ, તો નદીના પટની પહોળાઈ શોધી શકાય ખરી ? આ દષ્ટાંતમાં પણ આપણે કાટકોણ ત્રિકોણની કલ્પના કરી શકીએ છીએ.

એક વધારે દષ્ટાંત લઈએ. ધારો કે તમે તમારા ઘરના છાપરા ઉપર ઊભા છો અને તમે આકાશમાં ઉડતું એક વિમાન જુઓ છો. તમે તેના તરફ દૃષ્ટિ કરો ત્યારે વળી એક કાટકોણ ત્રિકોણની કલ્પના કરો. થોડા સમય પછી તે વિમાન તમારાથી દૂરજાય, ત્યાર`તેની તરફ જોવાથી રચાતા કાટકોણ ત્રિકોણની કલ્પના આ રીતે કરી શકાય. આકૃતિ 22.1 માં દર્શાવ્યા મુજબ વિમાનને જોતી તમારી આંખની દૃષ્ટિ-રેખા, વિમાનમાંથી પસાર થતી શિરોલંબ રેખા જે સમક્ષિતિજ રેખા પર લંબ છે અને આંખમાંથી પસાર થતી સમક્ષિતિજ રેખા એક કાટકોણ ત્રિકોણ રચે છે. આ થોડા સમય દરમિયાન વિમાને કેટલું અંતર કાપ્યું હશે, તે કહી શકો ?

ઉપર વર્ણવેલી અને તેના જેવી અન્ય ઘણી પરિસ્થિતિઓમાં ઉંચાઈ કે અંતરને ખરેખર માપ્યા સિવાય શોધી કાઢવાની રીતોનો ગણિતની જે શાખામાં અભ્યાસ કરવામાં આવે છે તે છે ત્રિકોણિતિ

ત્રિકોણમિતિ એટલે ત્રિકોણના ખૂણાઓ અને બાજુઓનું માપન કરવું. મૂળભૂત રીતે તો ત્રિકોણિમિતિને ત્રિકોણના ખૂકણાઓ અને બાજુઓનો ઉપયોગ કરીને ગણતરી કરવાની પદ્ધતિઓની શાખા ગણવામાં આવતી હતી. ખગોળશાસ્ત્ર, ભૂગોળ, ભૂમિ-માપન, ઈજનેરી અભ્યાસ, દરિયાઈ કે અન્ય યાનને ચલાવવાના આયોજન વગેરેમાં તેનો આધારભૂત ઉપયોગ થાય છે. ભૂતકાળમાં તારાઓ અને ગ્રહોનું પૃથ્વીથી અંતર શોધવા માટે ખગોળશાસ્ત્રીઓ તેનો ઉપયોગ કરતા. આજે ઈજનેરી વિજ્ઞાનની તકનિકીવિદ્યાની કેટલીક પાયાની બાબતોમાં ત્રિકોણિતીય સંકલ્પનાઓનો ઉપયોગ થાય છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે ત્રિકોણિતિય ગુણોત્તરોની વ્યાખ્યા કોઈ કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓના ગુણોત્તરોના સ્વરૂપમાં કરીશુ અને જુદા જુદા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોના સંબંધ સ્થાપિત કરીશુ. કેટલાક ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમો પણ આપણે આ પ્રકરણમાં સ્થાપિત કરીશું.

હેતુઓ

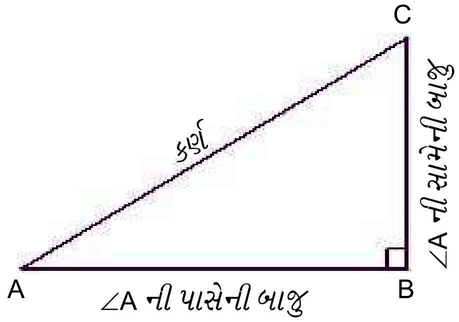
આ પ્રકરણ શીખ્યા પછીની અધ્યેતા

- કાટકોણ ત્રિકોણમાંના લઘુકોણના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તર લખી શકશે.
- જ્યારે કેટલીક બાજુઓ અને ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરનો જ્ઞાત હોય, ત્યારે કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓ અને ખૂણા શોધી શકશે.
- ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો વચ્ચેનો સંબંધ લખી શકશે.
- ત્રિકોણમિતીય પર્યાય પ્રસ્થાપિત કરી શકશે. (ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમો તારવી શકશે)
- ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો અને નિત્યસમો પર આધારિત કૂટપ્રશ્નો ઉકેલી શકશે.
- કોટિકોણના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો શોધી શકશે અને તેના પર આધારિત કૂટપ્રશ્નો ઉકેલી શકશે.

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન :

- *ખૂણાની સંકલ્પના*
- *કાટકોણ ત્રિકોણની રચના*
- *સમાંતર રેખાઓ દોરવી અને લંબરેખાઓ દોરવી*
- *ખૂણાના પ્રકાર : લઘુકોણ, કાટકોણ, ગુરૂકોણ*
- *ત્રિકોણના પ્રકાર : લઘુકોણ ત્રિકોણ, કાટકોણ ત્રિકોણ, ગુરૂકોણ ત્રિકોણ*
- *ત્રિકોણના પ્રકાર : સમદ્વિબાજુ, સમબાજુ ત્રિકોણ*
- *કોટિકોણ*

22.1 કાટકોણ ત્રિકોણમાંના લઘુકોણના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો

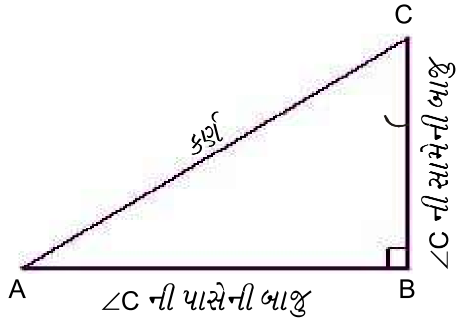


આકૃતિ. 22.2

B બિંદુઓ કાટકોણ હોય એવો કાટકોણ Δ ABC લઈએ. $\angle$A (CAB) એ લઘુકોણ છે. AC કર્ણ છે. $\angle$A ની સામેની બાજુ BC છે. $\angle$A ની પાસેની બાજુ AB છે.

આ ત્રિકોણમાં $\angle$C ને લગુકોણ તરીકે લઈએ, તો $\angle$C ની સામોની બાજુ AB છે અને $\angle$C ની પાસેની બાજુ BC છે.

હવે આપણે કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓ વચ્ચેના ગુણોત્તરો વ્યાખ્યાતિ કરીશું જેને ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો કહે છે.



આકૃતિ. 22.3

કાટકોણ Δ ABC ના લઘુકોણ ∠ A સંબંધિત ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો નીચે મુજબ છે.

(1) $\text{sine A} = \dfrac{\angle A \text{ ની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \dfrac{BC}{AC}$

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

ઉપરના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોને ટૂંકમાં અનુક્રમે sin A, cos A, tan A, cosec A, sec A *અને* cot A *કહેવામાં આવે છે. ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોને ટૂંકમાં ત્રિ-ગુણોત્તરો કહેવામાં આવે છે.*

જો આપણે $\angle A = \theta$ *લખીએ ઉપરના પરિણામો નીચે મુજબ લખાશે*

$\sin\theta =$, $\cos\theta = \dfrac{AB}{AC}$, $\tan\theta = \dfrac{BC}{AB}$

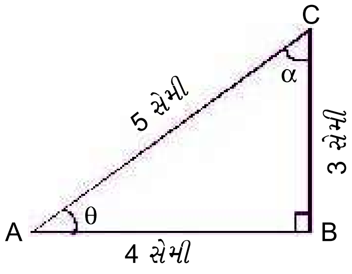
$\text{cosec}\,\theta = \dfrac{AC}{BC}$, $\sec\theta = \dfrac{AC}{AB}$ *અને* $\cot\theta = \dfrac{AB}{BC}$

નોંધ : *જુઓ કે* $\sin\theta$ *અને* $\text{cosec}\,\theta$, $\cot\theta$ *અને* $\sec\theta$ *તેમજ* $\tan\theta$ *અને* $\cos\theta$ *એકબીજાના વ્યસ્થ છે. આ રીતે કાટકોણ* ΔABC *માં જો* AB = 4*સેમી,* BC = 3*સેમી અને સેમી,* AC = 5 *સેમી હોય, તો*

$\sin\theta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{3}{5}$ $\text{cosec}\,\theta = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{5}{3}$

$\cos\theta = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{4}{5}$ $\sec\theta = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{5}{4}$

$\tan\theta = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{3}{4}$ *અને* $\cot\theta = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{4}{3}$



આકૃતિ. 22.4

ઉપરની આકૃતિમાં જો આપણે $C = \alpha$ લઈએ, તો

$$\sin \alpha = \frac{\angle \alpha \text{ ની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{\angle \alpha \text{ ની પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\angle \alpha \text{ ની સામેની બાજુ}}{\angle \alpha \text{ ની પાસેની બાજુ}} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\text{કર્ણ}}{\angle \alpha \text{ ની સામેની બાજુ}} = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{4}$$

$$\sec \alpha = \frac{\text{કર્ણ}}{\angle \alpha \text{ ની પાસેની બાજુ}} = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{\angle \alpha \text{ ની પાસેની બાજુ}}{\angle \alpha \text{ ની સામેની બાજુ}} = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$$

નોંધ :

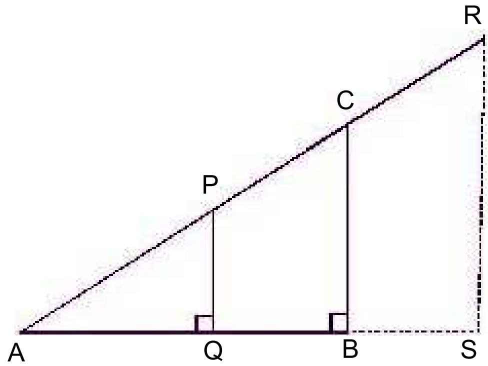
1. Sin A અથવા $\sin \theta$ એ એક પ્રતિક છે અને sin ને A કે θ થી જુદું પાડી શકાય નહિ. વળી તે $\sin \times \theta$ નથી. આ હકીકત દરેક ત્રિ-ગુણોત્તરોને લાગુ પડે છે.
2. દરેક ત્રિ-ગુણોત્તર એ એક વાસ્તવિક સંખ્યા છે.
3. $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$ અને $\tan^2\theta$ ને બદલે સરળ ખાતર $(\sin\theta)^2$, $(\cos\theta)^2$, અને $(\tan\theta)^2$ લખાય છે. આથી વધુ ઘાતાંકો માટે પણ દરેક ત્રિ-ગુણોત્તર માટે આ નિયમને અનુસરીશું.
4. A અથવા θ લઘુકોણ હોવો જોઈએ એ આપણી ત્રિ-ગુણોત્તરો માટેની મર્યાદા છે.

હવે પ્રશ્ન એ ઉભો થાય છે કે શું જુદા જુદા કાટકોણ ત્રિકોણ માટે ત્રિ-ગુણોત્તરના મૂલ્યો સમાન રહે છે ? આ પ્રશ્નનો જવાબ મેળવવા આપણે એક કાટકોણ ABC લઈએ, જેનો B ખૂણો કાટકૂણો હોય. કર્ણ AC પર કોઈ બિંદુ P લઈએ $PQ \perp AB$ લો.

હવે કાટકોણ ΔABC માં

$$\sin A = \frac{BC}{AC} \qquad \text{----(i)}$$

અને કાટકોણ ΔAQP માં



આકૃતિ. 22.5

$$\sin A = \frac{PQ}{AP} \qquad \text{----(ii),}$$

એ ΔAQP અને ΔABC માં

$\angle Q = \angle B$.... (બંને કાટકૂણા)

અને $\angle A = \angle A$ .... (સામાન્ય)

$\therefore \quad \Delta AQP \sim \Delta ABC$

$$\therefore \frac{AP}{AC} = \frac{QP}{BC} = \frac{AQ}{AB}$$

અથવા $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{PQ}{AP}$ ----(iii)

પરિણામ (1), (2) અને (3) પરથી જોઈ શકાય છે કે -- ની કિંમત બંને ત્રિકોણોમં સમાન છે.

એ જ રીતે $\cos A = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AQ}{AP}$ અને $\tan A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{PQ}{AQ}$

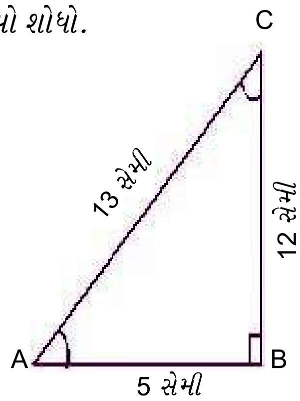
હવે લંબાવેલી AC ઉપર કોઈ બિંદુ R લઈએ $RS \perp AB$ (લંબાવેલી) ને S માં મળે છે. તમે તપાસી શકશો કે ΔASR માટે પણ ત્રિ-ગુણોત્તર મૂલ્યો એના એ જ રહે છે.

એ રીતે તારવી શકાય છે કે ત્રિ-ગુણોત્તરના મૂલ્યો કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓની લંબાઈ પર આધાર રાખતા નથી. તેઓ માત્ર ખૂણા પર આધારિત છે.

ઉદાહરણ 22.1: આકૃતિ 22.6 માં ΔABC નો B ખૂણો કાટખૂણે છે. જો AB = 5 સેમી, BC = 12 સેમી, AC = 13 સેમી અને C સેમી હોય, તો cosec C અને sec C નાં મૂલ્યો શોધો.

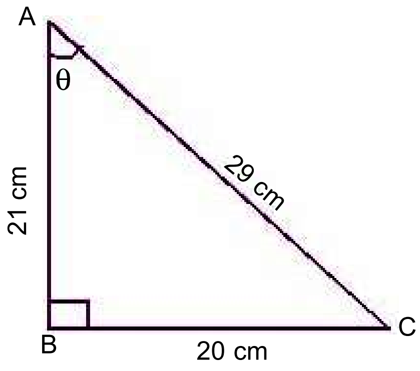
ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે

$$\tan C = \frac{\angle C \text{ ની સામેની બાજુ}}{\angle C \text{ ની પાસેની બાજુ}} = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{12}$$



આકૃતિ. 22.6

ઉદાહરણ 22.2 : આકૃતિ 22.7 પરથી $\sin\theta$, $\cot\theta$ અને $\sec\theta$ અંગેના મૂલ્યો શોધો.



આકૃતિ 22.7

ઉકેલ :

$$\operatorname{cosec} A = \frac{AC}{BC} = \frac{41}{40}$$

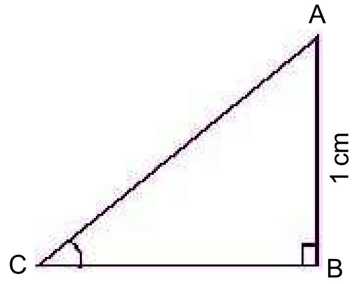
ઉદાહરણ 22.3 : *આકૃતિ 22.8 માં કાટકોણ* ΔABC *માં* B *કાટખૂણો છે. જો* $AB = 9$ *સેમી,* $BC = 40$ *સેમી અને* $AC = 41$ *સેમી હોય, તો* cos C, cot C, tan A, *અને* cosec A *ના મૂલ્યો મેળવો.*

ઉકેલ :

ઉદાહરણ 22.4 : આકૃતિ 22.9 માં કાટકોણ ΔABC નો B કાટખૂણો છે, $\angle A = \angle C$, AC = સેમી અને AB = 1 સેમી છે. sin C, cos C અને tan C નાં મૂલ્યો શોધો

ઉકેલ : ΔABC માં $\angle A = \angle C$

$\therefore$ BC = AB = 1 સેમી (પક્ષ)



આકૃતિ. 22.9

અને

નોંધ : ઉપરના ઉદાહરણમાં $\angle A = \angle C$ અને $\angle B = 90°$

sin 45° = cos 45° =

અને tan 45° = 1

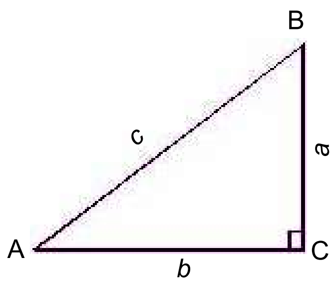
ઉદાહરણ 22.5 : આકૃતિ 22.10 માં કાટકોણ ΔABC નો C કાટખૂણો છે. જો $AB = c$, $AC = b$ અને $BC = a$ હોય, તો નીચેનામાંથી કોણ સત્ય છે ? જણાવો.

(i) tan A =

(ii) tan A $= \frac{c}{b}$

(iii) cot A $= \frac{b}{a}$

(iv) cot A $= \frac{a}{b}$



આકૃતિ. 22.10

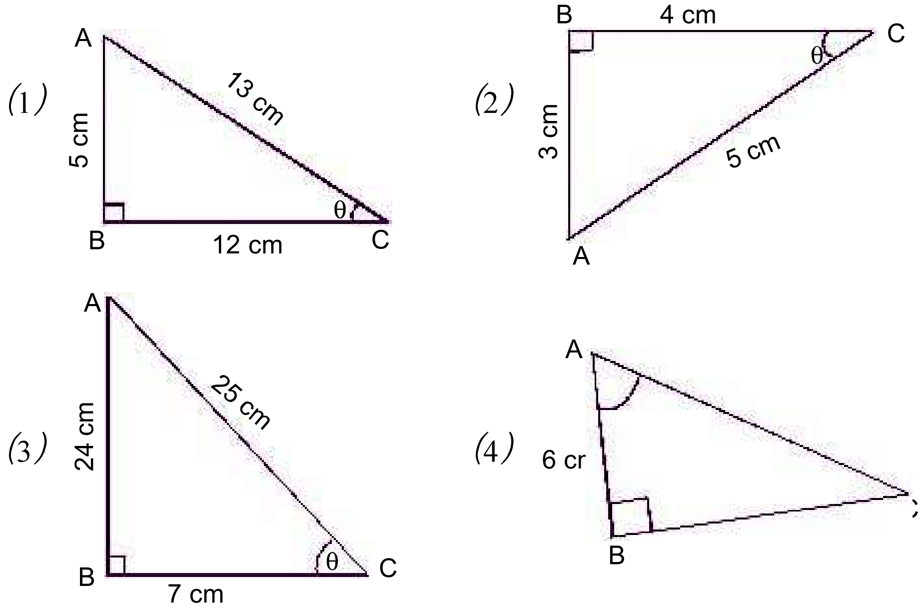
ઉકેલ : $\tan A = \frac{\angle A \text{ ની સામેની બાજુ}}{\angle A \text{ ની પાસેની બાજુ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$

અને

એટલે કે પરિણામ (3) $\cot A = \frac{b}{a}$ એ સાચું વિધાન છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 22.1

1. નીચેની આકૃતિઓમાં ΔABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે. જેમાં B કાટકૂણો છે. θ ખૂણા માટેના બધા ત્રિ-ગુણોત્તરો શોધો

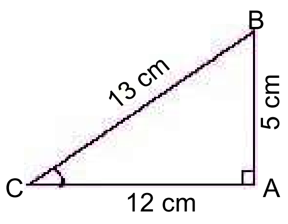


આકૃતિ 22.11

2. ΔABC માં B = 90°, BC = 5 સેમી, AB = 4 સેમી, અને AC = સેમી sin A, cos A, અને tan A ની કિંમત શોધો.
3. ΔABC માં $\angle B$ કાટખૂણો છે. જો AB = 40 સેમી, BC = 9 સેમી અને AC = 41 સેમી હોય, તો sin C, cot C, cos, A અને cot A ની કિંમત શોધો.
4. ΔABC માં B કાટખૂણો છે. જો AB = BC = 2 સેમી અને AC = હોય, તો sec C, cosec C, અને cot C શોધો.
5. આકૃતિ 22.12 માં ΔABC માં A કાટખૂણો છે.
   નીચેનામાંથી ક્યું સત્ય છે ?

(i) $\cot C = \frac{13}{12}$ (ii) $\cot C = \frac{12}{13}$

(iii) $\cot C = \frac{5}{12}$ (iv) $\cot C = \frac{12}{5}$

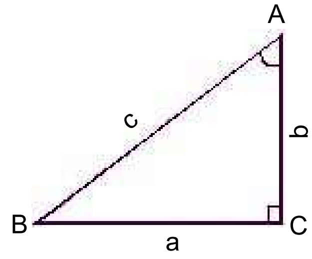


આકૃતિ 22.12

6. આકૃતિ 22.13 માં AC = b, BC = a અને AB = c છે.
   નીચેનામાંથી ક્યું સાચું છે.

(i) $\operatorname{cosec} A = \frac{a}{b}$ (ii) $\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}$

(iii) $\operatorname{cosec} A = \frac{c}{b}$ (iv) $\operatorname{cosec} A = \frac{b}{a}$.



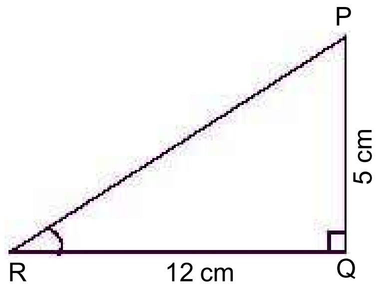
આકૃતિ. 22.13

22.2 કાટકોણ ત્રિકોણની આપેલી બે બાજુઓ પર ત્રિ-ગુણોત્તરો શોધવા

જ્યારે કાટકોણ ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં માપ આપ્યા હોય, ત્યારે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને ત્રીજી બાજુ શોધી શકીએ. પછી આપણે આપેલા ખૂણા માટેના ત્રિ-ગુણોત્તરો ઉપર શીખ્યા મુજબ ગણી શકીએ.

આપણે કેટલા ઉદાહરણો દ્વારા સમજીએ.

ઉદાહરણ 22.6: *આકૃતિ 22.14 માં ΔPQR નો Q કાટખૂણો છે. જો PQ = 5 સેમી અને QR = 12 સેમી હોય, તો sin R, cos R અને tan R શોધો.*



આકૃતિ. 22.14

ઉકેલ : *પાયથાગોરસ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને આપણે ત્રીજી બાજુ શોધીશુ. કારણ કે ΔPQR એ કાટકોણ Q છે.*

$\therefore$ PR = *(પાયથાગોરસ પ્રમેય)*

$$= \sqrt{5^2 + 12^2}$$

$$= \sqrt{25 + 144}$$

$$= \sqrt{169}$$

હવે ત્રિ-ગુણોત્તરોની વ્યાખ્યાઓને આધારે

$$\sin R = \frac{\angle R \text{ ની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$$

અને

ઉપરના ઉદાહરણ પરથી જાણી શકીએ છીએ કે,

કાટકોણ ત્રિકોણની બે બાજુઓ આપી અને ત્રિ-ગુણોત્તરો શોધવા હોય ત્યારે...

સોપાન -1: *પાયથાગોરસ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને ત્રીજી વસ્તુ શોધવી.*

સોપાન -2: *ત્રિ-ગુણોત્તરની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી તેમાં બાજુઓનાં માપ લખવા*

ઉદાહરણ 22.7 : *આકૃતિ* 22.15 *માં* ΔPQR *નો* Q *કાટખૂણો છે.* PR = 25 *સેમી,* PQ = 7 *સેમી અને* PRQ = θ. tan θ, cosec θ *અને* sec θ *નાં મૂલ્યો મેળવો.*

ઉકેલ :

ΔPQR *નો* Q *કાટખૂણો છે.*

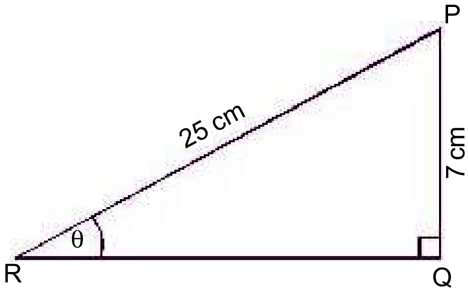
$QR^2 =$

$= \sqrt{25^2 - 7^2}$

$= \sqrt{625 - 49}$

$= \sqrt{576}$

$= 24$ *સેમી*



આકૃતિ. **22.15**

$\therefore$

$\sec\theta = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{PR}{QR} = \frac{25}{24}$

$\text{cosec}\,\theta = \frac{PR}{PQ} = \frac{25}{7}$ $\therefore$

ઉદાહરણ 22.8 : ΔABC *માં* $\angle B = 90°$ *જો* AB = 4 *સેમી, અને* BC = 3 *સેમી હોય, તો* sin C, cos C, cot C, tan A, sec A *અને* cosec A *શોધો.*

ઉકેલ : *પાયથાગોરસ પ્રમેય મુજબ,* ΔABC

$AC^2 =$

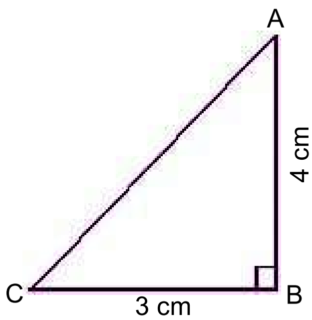
$= \sqrt{4^2 + 3^2}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$ *સેમી*

$\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$

$\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$



આકૃતિ. **22.16**

$$\cot C = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$$

$$\sec A = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{4}$$

અને $\quad \operatorname{cosec} A = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{3}$

હવે $\tan A$ અને $\cot C$ નાં મૂલ્યો સરખાં છે.

$$\tan A - \cot C = 0$$

ઉદાહરણ 22.9: આકૃતિ 22.17માં PQR નો R કાટખૂણો છે. જો PQ = 13 સેમી અને QR = 5 સેમી હોય, તો નીચેનામાંથી ક્યું વિધાન સાચું છે ?

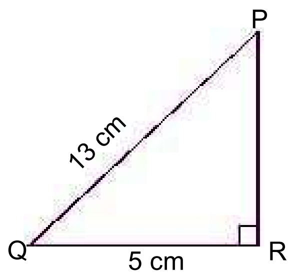
(i) $\sin Q + \cos Q = \frac{17}{13}$ $\quad$ (ii) $\sin Q - \cos Q = \frac{17}{13}$

(iii) $\sin Q + \sec Q = \frac{17}{13}$ $\quad$ (iv) $\tan Q + \cot Q = \frac{17}{13}$

ઉકેલ : $PR^2 = \sqrt{PQ^2 - QR^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$

$\therefore \quad \sin Q = \quad$ અને $\cos Q = \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{13}$

$\therefore \quad \sin Q + \cos Q =$



આકૃતિ. 22.17

એટલે કે વિધાન (1) $\sin Q + \cos Q = \frac{17}{13}$ સાચું છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 22.2

1. ΔABC માંB જમણે ખુણે હોય તો, AC = 10 cm, અને AB = 6 cm. $\sin C$, $\cos C$, અને $\tan C$ નું મૂલ્ય શોધો.

2. ΔABC માં, $\angle C = 90°$, $BC = 24$ cm અને $AC = 7$ cm. sin A, cosec A અને cot A નું મુલ્ય શોધો.

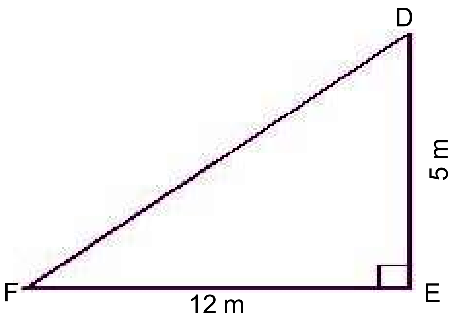
3. ΔPQR માં, Q = 90°, PR = cm અને QR = 10cm. તો sec P, cot P અને cosec P નું મુલ્ય શોધો.

4. ΔPQR માં, $\angle Q = 90°$, PQ = cm અને QR = 1 cm. તો tan R, cosec R, sin P અને sec P નું મુલ્ય શોધો.

5. ΔABC માં, $\angle B = 90°$, $AC = 25$ cm, $AB = 7$ cm અને ACB = θ. તો cot θ, sin θ, sec θ અને tan θ નું મુલ્ય શોધો.

6. ΔPQR માં, Q જમણે ખૂણે હોય, $PQ = 5$ cm અને $PR = 7$ cm. તો sin P, cos P, sin R અને cos R. અને sin P – cos R નું મુલ્ય શોધો.

7. ΔDEF માં, E કાટખૂણો છે. આકૃતિ 22.18. જો DE = 5 cm અને EF = 12 cm, હોય તો નીચેનામાંથી શું સાચું છે?



આકૃતિ. 22.18

i) sin F =

[illegible] $\sqrt{2}$
12

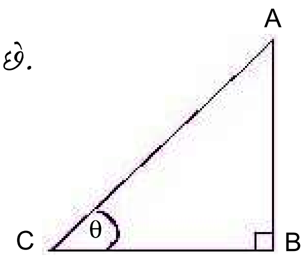
(ii) $\sin F = \frac{12}{5}$

(iii) $\sin F = \frac{5}{13}$

(iv) $\sin F = \frac{12}{13}$

22.3 એક ત્રિ-ગુણોત્તર પરથી બીજા ત્રિ-ગુણોત્તર શોધવા

ક્યારેક આપણે એક ત્રિ-ગુણોત્તર જાણતા હોઈએ અને આપણે બાકીના ત્રિ-ગુણોત્તરો જાણવા છે. ત્રિ-ગુણોતરની વ્યાખ્યા અને પાયથાગોરસના પ્રમેયને આધારે આ ગણતરી શક્ય બને છે. $\sin\theta = \frac{12}{13}$ લઈએ. પછી બીજા ત્રિ-ગુણોત્તર શોધવા કાટકોણ ABC દોરીએ છે.



આકૃતિ. 22.19

હવે $\sin\theta = \frac{12}{13}$

એટલે કે AB અને AC 12 : 13 ના પ્રમાણમાં છે.

ધારો કે AB = 12 k અને AC = 13 k છે.

$$BC^2 = \sqrt{AC^2 - AB^2} \quad \text{(પાયથાગોરસ)}$$

$$= \sqrt{(13k)^2 - (12k)^2}$$

$$= \sqrt{169k^2 - 144k^2}$$

$$= \sqrt{25k^2} = 5\,k$$

હવે આપણે બીજા બધા ત્રિ-ગુણોત્તરો શોધી શકીશું.

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13}$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{13k}{12k} = \frac{13}{12}$$

$$\sec\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{13k}{5k} = \frac{13}{5}$$

$$\cot\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$$

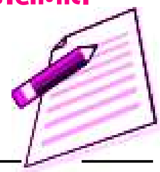
ઉપર ચર્ચા કર્યા મુજબ નીચેના સોપાન દ્વારા ઉકેલ મેળવી શકાય છે.

1. *કાટકોણ* ΔABC *દોરો.*
2. *આપેલ ત્રિ-ગુણોત્તર, બાજુઓના ગુણોત્તરથી દર્શાવો. ગુણોત્તરમાં અચળાંક* k *ધારો*
3. k *સ્વરૂપમાં બંને બાજુઓ જાણો.*
4. *પાયથાગોરસ પ્રમેયની મદદથી (અન્ય) ત્રીજી બાજુ શોધો.*
5. *હવે વ્યાખ્યાન સહારે બાકીના ત્રિ-ગુણોત્તર શોધો.*

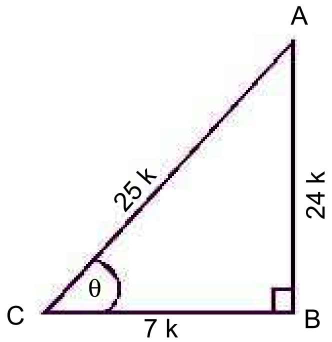
કેટલાક ઉદાહરણથી સમજીએ.

ઉદાહરણ 22.10 : *જો* $\cos\theta = \frac{7}{25}$, *તો* $\sin\theta$ *અને* $\tan\theta$ *શોધો.*

ઉકેલ : ΔABC *દોરો જેમાં* $\angle B = 90^\circ$ *અને* $C = \theta$ *આપણે જાણીએ છીએ કે,*



ધારો કે cos θ =   અને છે.



આકૃતિ. 22.20

$$AB^2 = \sqrt{AC^2 - BC^2} \text{ (પાયથાગોરસ)}$$

$$= \sqrt{(25k)^2 - (7k)^2}$$

$$= \sqrt{625k^2 - 49k^2}$$

$$= \sqrt{576k^2}$$

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{24k}{25k} = \frac{24}{25}$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{24k}{7k} = \frac{24}{7}$$

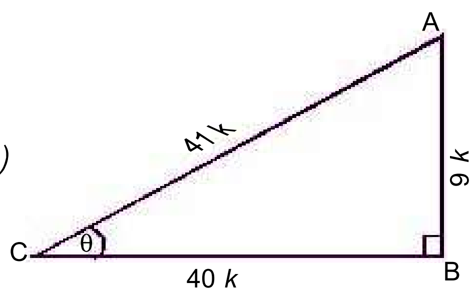
$\frac{BC}{AB}$

ઉદાહરણ 22.11: જો $\cot\theta = \frac{40}{9}$, હોય, તો $\frac{\cos\theta.\sin\theta}{\sec\theta}$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : ABC માં $\angle B = 90^\circ$ અને C = θ છે. આપણે જાણીએ છીએ કે

$$\cot\theta \quad = \qquad = \frac{40}{9}$$

ધારો કે BC = 40k અને ΔABC છે.



આકૃતિ. 22.21

$$AC^2 = \sqrt{BC^2 + AB^2} \text{ (પાયથાગોરસ)}$$

$$= \sqrt{(40k)^2 + (9k)^2}$$

$$= \sqrt{1600k^2 + 81k^2}$$

$$= \sqrt{1681k^2}$$

હવે $\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{9k}{41k} = \frac{9}{41}$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{40k}{41k} = \frac{40}{41}$$

અને $\sec\theta = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{41k}{40k} = \dfrac{41}{40}$

હવે $$\frac{\cos\theta . \sin\theta}{\sec\theta} = \frac{\frac{9}{41} \times \frac{40}{41}}{\frac{41}{40}}$$

$$= \frac{9}{41} \times \frac{40}{41} \times \frac{40}{41}$$

$$= \frac{14400}{68921}$$

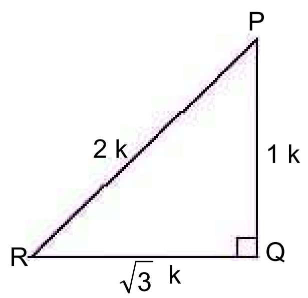
ઉદાહરણ 22.12: PQR માં $\angle Q = 90°$ અને $\tan R =$ સાબિત કરો કે

$$\sin P \cos R + \cos P \sin R = 1$$

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\tan R = \frac{PQ}{QR} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ધારો કે $PQ = k$ અને $QR = \sqrt{3}\,k$ છે.



આકૃતિ. 22.22

$$PR^2 = \sqrt{PQ^2 + QR^2}$$

$$= \sqrt{k^2 + \left(\sqrt{3}k\right)^2}$$

$$= \sqrt{k^2 + 3k^2}$$

$$= \sqrt{4k^2}$$

હવે $\therefore$ $$\sin P = \frac{\text{side opposite to } \angle P}{\text{Hypotenuse}} = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos P = \frac{\text{side adjacent to } \angle P}{\text{Hypotenuse}} = \frac{1k}{2k} = \frac{1}{2}$$

$$\sin R = \frac{\text{side opposite to } \angle R}{\text{Hypotenuse}} = \frac{PQ}{PR} = \frac{1k}{2k} = \frac{1}{2}$$

$$\cos R = \frac{\text{side adjacent to } \angle R}{\text{Hypotenuse}} = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad \sin P \cos R + \cos P \sin R = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4}$$

$$= 1$$

ઉદાહરણ 22.13 : ΔABC *માં* $\angle B$ *કાટખૂણો છે. જો* $AB = c$, $BC = a$ *અને* $AC = b$ *હોય, તો નીચેનામાંથી ક્યું સાચું છે.*

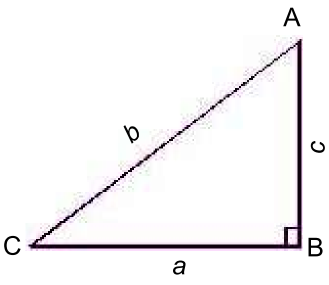
(i) $\cos C + \sin A =$

$\frac{2b}{a}$

(ii) $\cos C + \sin A = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$

(iii) $\cos C + \sin A = \frac{2a}{b}$

(iv) $\cos C + \sin A = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$



આકૃતિ. 22.23

ઉકેલ : *અહીં,* $\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$

અને $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$

$$\cos C + \sin A = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} = \frac{2a}{b}$$

એટલે વિધાન (3) $\cos C + \sin A = \frac{2a}{b}$ *સાચું છે.*

નોંધ

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 22.3

1. જો $\sin\theta = \frac{20}{29}$, તો $\cos\theta$ અને $\tan\theta$. ના મૂલ્યો શોધો.

2. જો $\tan\theta = \frac{24}{7}$, તો $\sin\theta$ અને $\cos\theta$ ના મૂલ્યો શોધો.

3. જો $\cos A = \frac{7}{25}$, તો $\sin A$ અને $\tan A$ ના મૂલ્યો શોધો.

4. જો $\cos\theta = \frac{m}{n}$, તો $\cot\theta$ અને $\operatorname{cosec}\theta$ નાં મૂલ્યો શોધો.

5. જો $\cos\theta = \frac{4}{5}$, તો $\frac{\cos\theta . \cot\theta}{1-\sec^2\theta}$ નું મૂલ્ય શોધો.

6. જો $\operatorname{cosec}\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$, તો $\sin^2\theta\cos\theta + \tan^2\theta$ શોધો.

7. જો $\cot B = \frac{5}{4}$, તો સાબિત કરો કે $\operatorname{cosec}^2 B = 1 + \cot^2 B$

8. ΔABC માં $\angle C = 90^\circ$. જો $A = \frac{3}{2}$, તો $\sin B$ અને $\tan B$ની કિંમત શોધો.

9. જો $A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ અને $B = \sqrt{3}$, તો સાબિત કરો કે $\cos A \cos B - \sin A \sin B = 0$

10. જો $\cot A = \frac{12}{5} = \frac{12}{5}$, તો બતાવો કે $\tan^2 A - \sin^2 A = \sin^4 A \sec^2 A$

    (માર્ગદર્શન : $\tan A$, $\sin A$ અને $\sec A$ ની કિંમત શોધો અને આપેલા સૂત્રમાં મૂકો)

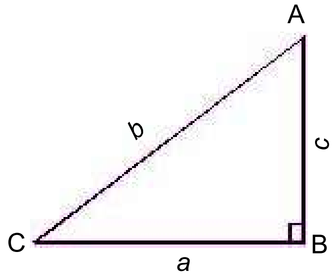
11. આકૃતિ 22.24 માં ΔABC ના શિરોબિંદુ B આગળ કાટખૂણો બને છે. જો $AB = c$, $BC = a$ અને $CA = b$ હોય, તો નીચેનામાંથી ક્યું વિધાન સાચું છે.

    (i) $\sin A + \cos A = \frac{b+c}{a}$

(ii) $\sin A + \cos A =$

(iii) $\sin A + \cos A =$

(iv) $\sin A + \cos A =$



આકૃતિ. 22.24

22.7 ત્રિ-ગુણોત્તરો વચ્ચેનો સંબંધ

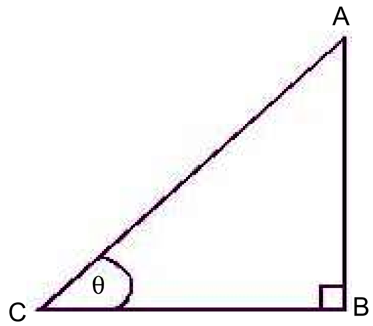
ABC માં B કાટખૂણો હોય, તો આપણે જાણીએ છીએ કે,

$\sin \theta =$

$$\cos \theta = \frac{BC}{AC}$$

અને $\quad \tan \theta = \frac{AB}{BC}$

$\frac{ABb+c}{ACb}$



આકૃતિ. 22.25

બીજી રીતે વિચારીએ $= \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{AC}, \frac{BC}{AC}$

$$= \frac{\frac{AB}{AC}}{\frac{BC}{AC}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

આમ, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

$AB = 3$ સેમી અને $BC = 4$ સેમી લઈને આ પરિણામ ચકાસીએ

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = 25$$

$\sin \theta = \frac{3}{5}, \cos \theta = \frac{4}{5}$ અને $\tan \theta = \frac{3}{4}$

હવે $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} = \tan \theta.$

પરિણામ સાચું છે.

વળી $\sin\theta = \dfrac{AB}{AC}$

$$\frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{AC}} = \frac{AC}{AB} = \operatorname{cosec}\theta$$

આમ, $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ અથવા $\operatorname{cosec}\theta \,.\, \sin\theta = 1$

એટલે કે $\operatorname{cosec}\theta$ અને $\sin\theta$ એકબીજાના વ્યસ્ત છે.

વળી, $\cos\theta = \dfrac{BC}{AC}$

$$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{BC}{AC}} = \frac{AC}{BC} = \sec\theta$$

આમ $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ અથવા $\sec\theta \,.\, \cos\theta = 1$

એટલે કે $\sec\theta$ અને $\cos\theta$ એકબીજાના વ્યસ્ત છે.

છેલ્લે, $\tan\theta = \dfrac{AB}{BC}$

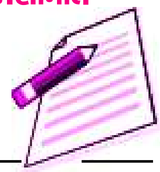
$$\frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{BC}} = \frac{BC}{AB} = \cot\theta$$

આમ, $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ અથવા $\tan\theta \,.\, \cot\theta = 1$

વળી $\cot\theta = \dfrac{1}{\sin\theta / \cos\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

એટલે કે $\cot\theta$ અને $\tan\theta$ એકબીજાના વ્યસ્ત છે.

આમ સમગ્ર રીતે જોઈએ તો,



cosec θ, sec θ અને cot θ એ અનુક્રમે sin θ, cos θ અને tan θ ના વ્યસ્ત છે.

આ રીતે આપણે નીચે મુજબ નવા પરિણામો મેળવ્યા

(i) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(ii) $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

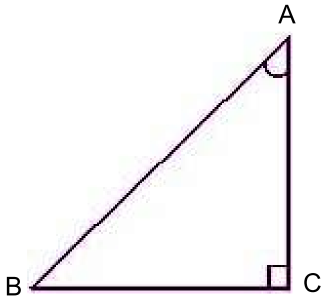
(iii) $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

(iv) $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

હવે વિવિધ ત્રિ-ગુણોત્તરોનું મૂલ્ય શોધવા ઉપરના પરિણામોનો સહારો લઈ શકીશું.

ઉદાહરણ 22.14 : જો $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ અને $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, હોય, તો cosec θ, sec θ અને tan θ નાં મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : આપણે શીખી ગયા છીએ કે,



આકૃતિ. 22.26

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

ઉદાહરણ 22.15 : ABC, માં C કાટખૂણો છે. tan A = 1 ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : ΔABC દોરીએ જેમાં $\angle C = 90^\circ$. કાટખૂણો હોય.

tan A = 1 (પક્ષ)

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = 1$$

$$BC = AC$$

ધારો કે $BC = AC = k$

હવે $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2}$

$$= \sqrt{k^2 + k^2}$$

$$= \sqrt{2}k$$

હવે $\cos B = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{k}{\sqrt{2}k}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો ૨૨.૪

1. જો $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ અને $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, હોય, તો $\cot\theta$ અને $\sec\theta$ નાં મૂલ્યો શોધો.

2. જો $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ અને $\tan\theta = \sqrt{3}$, હોય, તો $\cos^2\theta + \sin\theta\cot\theta$ નું મૂલ્ય શોધો.

3. ΔABC માં $\cos A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ હોય, તો $\sin B + \cos A \cos B$ નું મૂલ્ય શોધો.

4. જો $\operatorname{cosec} A = 2$ હોય, તો $\sin A$ અને $\tan A$ નાં મૂલ્યો શોધો.

5. ΔABC માં $\tan A = \sqrt{3}$, હોય, તો $\tan^2 B \sec^2 A - (\tan^2 A + \cot^2 B)$ શોધો.

22.5 નિત્યસમ

આપણે બીજગણિતમાં સમીકરણ વિશે શીખી ગયાં છીએ. જ્યારે બે પદાવલીઓ '=' (બરાબર)ની નિશાનીથી જોડાય છે, ત્યારે સમીકરણ બને છે. આ વિભાગમાં આપણે નિત્યસમની સંકલ્પનાનો મુદ્દો શીખીશું સમીકરણની જેમ જ જ્યારે બે પદાવલીઓ (=) બરાબરની નિશાનીથી જોડાય છે ત્યારે નિત્યસમ બને છે. તો પછી પ્રશ્ન ઉદ્ભવે કે સમીકરણ અને નિત્યસમ વચ્ચે તફાવત શું છે ?

બે વચ્ચેનો મુખ્ય તફાવત એ છે કે સમીકરણમાં રહેલા ચલની નિશ્ચિત કિંમત માટે જ તે સત્ય ઠરે છે, જ્યારે ચલની કોઈ પણ કિંમત માટે તે સ્તય ઠરે ત્યારે તે નિત્યસમ કહેવાય છે.

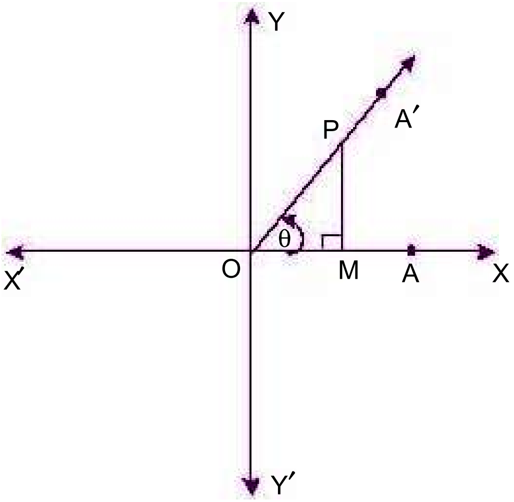
જેમ કે $x^2 - 2x + 1 = 0$ એ સમીકરણ છે કારણ કે $x = 1$ માટે જ તે સત્ય ઠરે છે. તે જ રીતે $x^2 - 5x + 6 = 0$ એ પણ સમીકરણ જ છે. કારણ કે $x = 2$ અને $x = 3$ માટે જ તે સત્ય ઠરે છે.

જો આપણે $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ એ સ્વરૂપમાં રજૂ કરીએ, તો રજૂઆત એ નિત્યસમ છે. કારણ કે $x = 2, x = 3$ માટે તો તે સત્ય છે જ સાથોસાથ $x = 0, x = 10$ જેવી કોઈ પણ કિંમત માટે તે સત્ય બને છે. હવે પછીના વિભાગમાં આપણે કેટલાક ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ અંગે વિચારીશું.

22.9 ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ

આપણે જાણીએ છીએ કે જ્યારે કિરણ તેના ઉદ્ભવ બિંદુએ ભ્રમણ કરે છે અને કોઈ નિશ્ચિત જગ્યાએ સ્થિર થાય છે ત્યારે કિરણના મૂળ સ્થાન અને અંતિમ સ્થાન વચ્ચે ખૂણો રચાય છે તમે જાણો છો કે બધા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તર ખૂણા પર આધારિત છે ફરી નીચેની રીતે યાદ કરી લઈએ

આકૃતિ 22.27 માં XOX′ અને YOY′ બે પરસ્પર લંબ હોય એવી ધરી (અક્ષ) છે. OX ઉપર કોઈ બિંદુ OA છે. આ સમતલમાં O કિરણ ઘડિયાળના કાંટા ફરવાની દિશાથી વિરુદ્ધ દિશામાં ભ્રમણ કરે છે અને કેટલાક સમય પછી OA′ સ્થાન પ્રાપ્ત કરે છે. ધારો કે $\angle A'OA = \theta$ કિરણ OA′ પર કોઈ બિંદુ P લો. P માંથી PM $\perp$ OX દોરો.



આકૃતિ. 22.27

કાટકોણ ΔPMO માં

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP}$$

અને $$\cos\theta = \frac{OM}{OP}$$

બંનેનો વર્ગ કરીને ઉમેરતાં

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{PM}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2$$

$$= \frac{PM^2 + OM^2}{OP^2} = \frac{OP^2}{OP^2} \qquad = 1$$

$$\sin^2 q + \cos^2 q = 1 \qquad ...(1)$$

આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે

$$\sec^2 \theta = \frac{OP}{OM}$$

અને $\tan^2\theta = \frac{PM}{OM}$

બંનેનો વર્ગ કરીને બાદ કરતાં,

$$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = \left(\frac{OP}{OM}\right)^2 - \left(\frac{PM}{OM}\right)^2$$

$$= \frac{OP^2 - PM^2}{OM^2}$$

$$= \frac{OM^2}{OM^2} \quad [OP^2 - PM^2 = OM^2]$$

$$= 1$$

$$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1 \qquad ...(2)$$

એ જ રીતે, $\operatorname{cosec} \theta = \frac{OP}{PM}$

અને $\cot \theta = \frac{OM}{PM}$

બંનેનો વર્ગ કરીને બાદ કરતાં,

$$\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = \left(\frac{OP}{PM}\right)^2 - \left(\frac{OM}{PM}\right)^2$$

$$= \frac{OP^2 - OM^2}{PM^2} = \frac{PM^2}{PM^2} \qquad [OP^2 - OM^2 = PM^2]$$

$$= 1$$

$$\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1 \qquad ...(3)$$

નોંધ : *નિત્યસમ (1), (2) અને (3) ઉપર સમીકરણના પક્ષાંતરના નિયમો વાપરીને પરિણામો નીચે મુજબ પણ મેળવી શકાય.*

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ *અથવા* $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ *અથવા* $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

$\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ *અથવા* $\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1$

ઉપરના નિત્યસમોનો ઉપયોગ કરીને કેટલાક દાખલાઓનો ઉકેલ મેળવીશું.

ઉદાહરણ 22.16 : *સાબિત કરો કે*

$$\tan\theta + \cot\theta = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

ઉકેલ : *(ડા.બા. એટલે ડાબી બાજુ અને જ.બા. એટલે જમણી બાજુ)*

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} \qquad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

$$\tan\theta + \cot\theta =$$

$$\frac{2+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}$$

ઉદાહરણ 22.17 : *સાબિત કરો કે*

$$\frac{\sin A}{1+\cos A} + \frac{1+\cos A}{\sin A} = 2\,\text{cosec}\,A$$

ઉકેલ : *ડા.બા.* $= \dfrac{\sin A}{1+\cos A} + \dfrac{1+\cos A}{\sin A}$

$$= \frac{\sin^2 A + (1+\cos A)^2}{\sin A\,(1+\cos A)}$$

$$= \frac{\sin^2 A + 1 + \cos^2 A + 2\cos A}{\sin A\,(1+\cos A)}$$

$$= \frac{(\sin^2 A + \cos^2 A) + 1 + 2\cos A}{\sin A\,(1+\cos A)}$$

$$= \frac{1+1+2\cos A}{\sin A\,(1+\cos A)}$$

$$=$$

$=$

$=$

$= 2 \operatorname{cosec} A$

$=$ જ.બા.

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2 \operatorname{cosec} A$$

ઉદાહરણ 22.18 : *સાબિત કરો કે*

$$\frac{1-\sin A}{1+\sin A}=(\sec A-\tan A)^2$$

ઉકેલ : *ડા.બા. = જ.બા. સાબિત કરવાને બદલે અનુકૂળતા મુજબ જ.બા. = ડા.બા. પણ સાબિત કરી શકાય. અહીં જ.બા.નું વિસ્તરણ કરીને ડા.બા. મેળવવાનું સરળ જણાય છે.*

જ.બા. $=$

$$=\left(\frac{1}{\cos A}-\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1-\sin A}{\cos A}\right)^2$$

$$=\frac{(1-\sin A)^2}{\cos^2 A}$$

$$=\frac{(1-\sin A)^2}{1-\sin^2 A} \qquad (\because \cos^2 A=1-\sin^2 A)$$

$$=\frac{(1-\sin A)^2}{(1-\sin A)(1+\sin A)}$$

$$=\frac{1-\sin A}{1+\sin A}$$ = ડા.બા.

બીજી રીત

હવે ડા.બા.થી શરૂઆત કરીને પરિણામ મેળવીએ

ડા.બા. =

$$= \qquad \times$$

$$=$$

$$= \frac{(1-\sin A)^2}{\cos^2 A}$$

$$= \left(\frac{1-\sin A}{\cos A}\right)^2$$

$$\frac{(1-\sin A)^2}{1+\sin A}$$

$$= \left(\frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A}\right)^2$$

$$= (\sec A - \tan A)^2$$

= જ.બા.

ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમનો ઉપયોગ કરી પ્રશ્નનો ઉકેલ મેળવવાની પદ્ધતિ

સોપાન 1 : ડા.બા. કે જ.બા. પસંદ કરો કે જ્યાંથી ગણતરી કરવાનું સરળ જણાતું હોય.

સોપાન 2: ડા.બા. (કે જ.બા.) પર વિવિધ નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને બીજી તરફના પરિણામ સુધી પહોંચો.

સોપાન 3: જો તમે એક બાજુથી શરૂ કરી બીજી બાજુ સુધી પહોંચી ન શકો, તો જ્યાંથી આગળ વધવાની સમજ ન પડે ત્યાં અટકી જાવ અને બીજી બાજુથી શરૂ કરીને અહીં સુધી પહોંચી જાવ. આમ ડા.બા.થી શરૂ કરીને કોઈ પરિણામ મેળવો પછી જ.બા.થી શરૂ કરીને આ પરિણામ સુધી પહોંચો તો પણ પરિણામ સાબિત કર્યું કહેવાય

સોપાન 4:

ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમો પર આધારિત કેટલાક વધુ ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 22.19 : સાબિત કરો કે

$$\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

ઉકેલ : ડા.બા. $= \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$

$$= \frac{\sqrt{1-\sin\theta}}{\sqrt{1+\sin\theta}} \times \frac{\sqrt{1+\sin\theta}}{\sqrt{1+\sin\theta}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{(1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{\sqrt{\cos^2\theta}}{1+\sin\theta} \qquad (\because 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta)$$

$$= \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$ = જ.બા.

$$\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

ઉદાહરણ 22.20 : સાબિત કરો કે

$$\cos^4 A - \sin^4 A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$$

ઉકેલ : ડા.બા. $= \cos^4 A - \sin^4 A$

$$= (\cos^2 A)^2 - (\sin^2 A)^2$$

$$= (\cos^2 A + \sin^2 A)(\cos^2 A - \sin^2 A)$$

$$= \cos^2 A - \sin^2 A \qquad (\because \cos^2 A + \sin^2 A = 1)$$

= જ.બા.

હવે $\cos^2 A - \sin^2 A = (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A \quad (\quad \cos^2 A = 1 - \sin^2 A)$

$$= 1 - 2\sin^2 A$$

= જ.બા.

આમ, $\cos^4 A - \sin^4 A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$

ઉદાહરણ 22.21: *સાબિત કરો કે*

$$\sec A\,(1-\sin A)\,(\sec A+\tan A)=1$$

ઉકેલ : ડા.બા. $= \sec A\,(1-\sin A)\,(\sec A+\tan A)$

$=$

$$= \frac{(1-\sin A)(1+\sin A)}{\cos^2 A}$$

$=$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}$$

$= 1$ = *જ.બા.*

આમ, $\sec A\,(1-\sin A)\,(\sec A+\tan A)=1$

ઉદાહરણ 22.22: *સાબિત કરો કે* $\left(\because 1=\sec^2\theta-\tan^2\theta\right)$

$$\frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

Wfu÷: *ડા.બા.* =

$=$

$$= \frac{(\tan\theta+\sec\theta)-(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)}{\tan\theta-\sec\theta+1}$$

$=$

$=$

$= \tan\theta+\sec\theta$

$=$

$=$ જ.બા.

હવે $=$

$=$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

$=$ જ.બા.

આમ, $\dfrac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

$$= \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

ઉદાહરણ 22.23 : જો $\cos\theta - \sin\theta =$ $\sin\theta$, તો સાબિત કરો કે $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$.

ઉકેલ : આપેલુ છે કે $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$

અથવા $\cos\theta = \sqrt{2}\sin\theta + \sin\theta$

અથવા $\cos\theta = (\sqrt{2}+1)\sin\theta$

અથવા $\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}+1} = \sin\theta$

અથવા $\sin\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}+1} \times \dfrac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)}$

અથવા $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}\cos\theta - \cos\theta}{2-1}$

અથવા $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\cos\theta$

$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta.$

ઉદાહરણ 22.24: જો $\tan^4\theta + \tan^2\theta = 1$, then show that

$\cos^4\theta + \cos^2\theta = 1$

ઉકેલ : $\tan^4\theta + \tan^2\theta = 1$

$\therefore \quad \tan^2\theta\,(\tan^2\theta + 1) = 1$

$\therefore \quad 1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\tan^2\theta} = \cot^2\theta$

$\therefore \quad \sec^2\theta = \cot^2\theta \qquad (\because\ 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta)$

$\therefore \quad \dfrac{1}{\cos^2\theta} = \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$\therefore \quad \sin^2\theta = \cos^4\theta$

$\therefore \quad 1 - \cos^2\theta = \cos^4\theta \qquad (\because\ \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta)$

$\therefore \quad \cos^4\theta + \cos^2\theta = 1$

નીચેના નિત્યસમ સાબિત કરો.

1. $(\operatorname{cosec}^2\theta - 1)\sin^2\theta = \cos^2\theta$
2. $\sin^4 A + \sin^2 A\cos^2 A = \sin^2 A$
3. $\cos^2\theta\,(1 + \tan^2\theta) = 1$
4. $(1 + \tan^2\theta)\sin^2\theta = \tan^2\theta$
5. $\dfrac{\sin A}{1+\cos A} + \dfrac{\sin A}{1-\cos A} = 2\operatorname{cosec} A$
6. $\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}} = \dfrac{1+\cos A}{\sin A}$

7. $\sqrt{\dfrac{\sec A - \tan A}{\sec A + \tan A}} = \dfrac{\cos A}{1 + \sin A}$

8. $(\sin A - \cos A)^2 + 2 \sin A \cos A = 1$

9. $\cos^4 \theta + \sin^4 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = (2 \cos^2 \theta - 1)^2$

10. $\dfrac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} + \dfrac{\cos A - \cos B}{\sin A + \sin B} = 0$

11. $(\operatorname{cosec} \theta - \sin \theta)(\sec \theta - \cos \theta)(\tan \theta + \cos \theta) = 1$

12. $\sin A(1 + \tan A) + \cos A(1 + \cot A) = \sec A + \operatorname{cosec} A$

13.

14.

15. $\dfrac{\cot A + \operatorname{cosec} A - 1}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1} = \dfrac{1 + \cos A}{\sin A}$

$= \dfrac{\sin A}{1 - \cos A}$

16. જો $\sin^2 \theta + \sin \theta = 1$, *તો સાબિત કરો કે*

$\cos^2 \theta + \cos^4 \theta = 1$

પ્રશ્ન 17 થી 20 માં આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરો.

17. $(\sin A + \cos A)^2 - 2 \sin A \cos A =$.............

(i) 0 (ii) 2 (iii) 1 (iv) $\sin^2 A - \cos^2 A$

18. $\sin^4 A - \cos^4 A =$ ....

(i) 1 (ii) $\sin^2 A - \cos^2 A$ (iii) 0 (iv) $\tan^2 A$

19. $\sin^2 A - \sec^2 A + \cos^2 A + \tan^2 A =$ ....

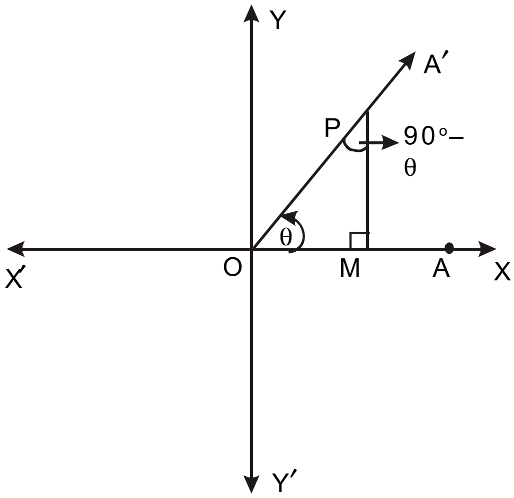
(i) 0 (ii) 1 (iii) $\sin^2 A$ (iv) $\cos^2 A$

20. $(\sec A - \tan A)(\sec A + \tan A) - (\operatorname{cosec} A - \cot A)(\operatorname{cosec} A + \cot A) =$ ....

(i) 2 (ii) 1 (iii) 0 (iv)

22.10

ભૂમિતીમાં આપણે કોટિકોણ અને પૂરકકોણ વિશે શીખી ગયા છીએ. જે બે ખૂણાનો સરવાળો 90^0 થાય તે બંને એકબીજાના કોટિકોણ કહેવાય છે. જો ખૂણા A અને B નો સરવાળો 90^0 હોય, તો $\angle A$ અને $\angle B$ એકબીજાના કોટિકોણ છે. એજ રીતે 20^0 અને 70^0 ના ખૂણા એકબીજાના કોટિકોણ છે.



આકૃતિ. 22.28

ધારો કે XOX^1 અને YOY^1 લંબ યમાક્ષો છે. A અને OX પરનું કોઈ એક બિંદુ છે. OA કિરણ ઘડિયાળના કાંટાની વિરુદ્ધ દિશામાં ફરીને OA^1 સ્થિતિએ પહોંચે છે OA અને OA^1 વડે રચાતો ખૂણો Q છે. ધારો કે $\angle POM = Q$. $PM \perp OX$ દોરો તેથી ΔPMO કાટકોણ Δ થશે.

$\therefore \quad \angle POM + \angle OPM + \angle PMO = 180^o$

$\therefore \quad \angle POM + \angle OPM + 90^o = 180^o$

$\therefore \quad \angle POM + \angle OPM = 90^o$

$\therefore \quad \angle OPM = 90^o - \angle POM = 90^o - Q$

આ રીતે $\angle OPM$ અને $\angle POM$ કોટકોણની જોડ છે. એ કાટકોણ PMO માં

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP}, \cos\theta = \frac{OM}{OP} \text{ અને } \tan\theta = \frac{PM}{OM}$$

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{OP}{PM}, \sec\theta = \frac{OP}{OM} \text{ અને } \cot\theta = \frac{OM}{PM}$$

કાટકોણ $\angle OPM$ માં $\angle OPM = 90^0\text{-}Q$

$$\sin\left(90^o - \theta\right) = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\cos\left(90^o - \theta\right) = \frac{PM}{OP} = \sin\theta$$

$$\tan\left(90^o - \theta\right) = \frac{OM}{PM} = \cot\theta$$

$$\cot\left(90^\circ - \theta\right) = \frac{PM}{OM} = \tan\theta$$

$$\operatorname{cosec}\left(90^\circ - \theta\right) = \frac{OP}{OM} = \sec\theta$$

અને $$\sec\left(90^\circ - \theta\right) = \frac{OP}{PM} = \operatorname{cosec}\theta$$

ઉપરના છ પરિણામો કોટિકોણના ત્રિ-કોટિકોણના ત્રિ-ગુણોત્તરો તરીકે ઓળખાય છે.

દાખલા તરીકે,

$\sin(90^\circ - 20^\circ) = \cos 20^\circ$ *એટલે કે* $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$

$\tan(90^\circ - 40^\circ) = \cot 40^\circ$ *એટલે કે* $\tan 50^\circ = \cot 40^\circ$ and so on.

ઉપરના પરિણામોને આત્મસાત કરવા કેટલાક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 22.25: *સાબિત કરો કે* $\tan 13^\circ = \cot 77^\circ$

ઉકેલ: *જ.બા.* $= \cot 77^\circ$

$= \cot(90^\circ - 13^\circ)$

$= \tan 13^\circ$ ....$[\because \cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta]$

$=$ *ડા.બા.*

માટે, $\tan 13^\circ = \cot 77^\circ$

ઉદાહરણ 22.26: $\sin^2 40^\circ - \cos^2 50^\circ$ *ની કિંમત શોધો.*

ઉકેલ: $\cos 50^\circ = \cos(90^\circ - 40^\circ)$

$= \sin 40^\circ$ ....$[\ \cos(90^\circ - \theta) = \tan\theta]$

$\therefore \quad \sin^2 40^\circ - \cos^2 50^\circ = \sin^2 40^\circ - \sin^2 40^\circ = 0$

ઉદાહરણ 22.27: *ની કિંમત શોધો.*

ઉકેલ: $\sin 49^\circ = \sin(90^\circ - 41^\circ) = \cos 41^\circ$ ...$[\because \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta]$

અને $\operatorname{cosec} 53^\circ = \operatorname{cosec}(90^\circ - 37^\circ) = \sec 37^\circ$ ...$[\ \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta]$

$$\therefore \quad = \frac{\cos 41^\circ}{\cos 41^\circ} + \frac{\sec 37^\circ}{\sec 37^\circ} = 1 + 1 = 2$$

ઉદાહરણ 22.28: *સાબિત કરો.*

$3 \sin 17^\circ \sec 73^\circ + 2 \tan 20^\circ \tan 70^\circ = 5$

ઉકેલ: $3 \sin 17^\circ \sec 73^\circ + 2 \tan 20^\circ \tan 70^\circ$

$= 3 \sin 17^\circ \sec (90^\circ - 17^\circ) + 2 \tan 20^\circ \tan (90^\circ - 20^\circ)$

$= 3 \sin 17^\circ \operatorname{cosec} 17^\circ + 2 \tan 20^\circ \cot 20^\circ$

...[$\because$ sec $(90^\circ - q)$ = cosec q and tan $(90^\circ - q)$ = cot q]

=

$= 3 + 2 = 5$

ઉદાહરણ 22.29: *સાબિત કરો કો* $\tan 7^\circ \tan 23^\circ \tan 67^\circ \tan 83^\circ = 1$

ઉકેલ: $\tan 67^\circ = \tan (90^\circ - 23^\circ) = \cot 23^\circ$

and $\tan 83^\circ = \tan (90^\circ - 7^\circ) = \cot 7^\circ$

હવે, ડા.બા. $= \tan 7^\circ \tan 23^\circ \tan 67^\circ \tan 83^\circ$

$= \tan 7^\circ \tan 23^\circ \cot 23^\circ \cot 7^\circ$

$3 \sin 17^\circ \cdot \frac{1}{\sin 17^\circ} + 2 \tan 20^\circ \cdot \frac{1}{\tan 20^\circ}$ $\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\left(\frac{A}{2}\right)$

$= (\tan 7^\circ \cot 7^\circ)(\tan 23^\circ \cot 23^\circ)$

$= 1 . 1 = 1$

= *જ.બા.*

$\tan 7^\circ \tan 23^\circ \tan 67^\circ \tan 83^\circ = 1$

ઉદાહરણ 22.30: *જો* $\tan A = \cot B$, *હોય તો* $A + B = 90^\circ$.

ઉકેલ: *સાબિત કરો કે*

$\tan A = \cot B$ *(પક્ષ)*

$\therefore$ $\tan A = \tan (90^\circ - B)$ ... [$\because$ cot q = tan $(90^\circ - q)$]

$\therefore$ $A = 90^\circ - B$

$\therefore$ $A + B = 90^\circ$

ઉદાહરણ 22.31: ΔABC *ના અંદરના* A, B, C *માટે સાબિત કરો કે* .

ઉકેલ: *આપણે જાણીએ છીએ કે ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાનો સરવાળો* 180^0 *થાય છે.*

$\therefore \quad A + B + C = 180^\circ$

$\therefore \quad B + C = 180^\circ - A$

$\therefore \quad \frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$

$\therefore$

$\therefore \quad \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\left(\frac{A}{2}\right)$

ઉદાહરણ 22.32: *સાબિત કરો કે* $\frac{\cos\theta}{\sin(90^\circ - \theta)} + \frac{\sin\theta}{\cos(90^\circ - \theta)} = 2$.

ઉકેલ: =*ડા.બા.* $\frac{\cos\theta}{\sin(90^\circ - \theta)} + \frac{\sin\theta}{\cos(90^\circ - \theta)}$

$= \frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\sin\theta}$ ... [$\because$ $\sin(90^\circ - \theta) = \cos q$ અને $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$]

$= 1 + 1 = 2$

= *જ.બા.*

ઉદાહરણ 22.33: *સાબિત કરો કે*

ઉકેલ: *જ.બા.* = $\frac{\sin(90^\circ - \theta)}{\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)} + \frac{\cos(90^\circ - \theta)}{\sec(90^\circ - \theta)}$

$= \frac{\cos\theta}{\sec\theta} + \frac{\sin\theta}{\operatorname{cosec}\theta}$ ...[$\because$ $\sin(90^\circ - \theta) = \cos q$, $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$,

$\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec q$ and $\sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$]

$=$ $\quad = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

= *ડા.બા.*

જેથી, $\frac{\sin(90^\circ - \theta)}{\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)} + \frac{\cos(90^\circ - \theta)}{\sec(90^\circ - \theta)} = 1$

ઉદાહરણ 22.34: *સાદુરૂપ આપો:*

$$\frac{\cos(90^\circ-\theta)\sec(90^\circ-\theta)\tan\theta}{\mathrm{cosec}(90^\circ-\theta)\sin(90^\circ-\theta)\cot(90^\circ-\theta)}+\frac{\tan(90^\circ-\theta)}{\cot\theta}$$

ઉકેલ: *પદાવલી* $=\dfrac{\cos(90^\circ-\theta)\sec(90^\circ-\theta)\tan\theta}{\mathrm{cosec}(90^\circ-\theta)\sin(90^\circ-\theta)\cot(90^\circ-\theta)}+\dfrac{\tan(90^\circ-\theta)}{\cot\theta}$

(વ્યાખ્યા મુજબ કિંમત મૂકતાં)

$=\dfrac{\sin\theta in\theta.co\ \theta.\tan\theta}{\sec\theta ec\theta.cotan\,\theta}+\dfrac{\cot\theta}{\cot\theta}$ ...[$\because$ sin θ . cos θ = 1 and sec θ . cos θ = 1]

$= 1 + 1$

$= 2$

ઉદાહરણ 22.35: tan 68° + sec 68° *ને એવા સ્વરૂપમાં દર્શાવો કે જેના ખૂણા* 0^0 *થી* 45^0 *વચ્ચના હોય.*

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે,

tan (90° – q) = cot q

અને sec (90° – q) = cosec q

$\therefore$ tan 68° = tan (90° – 22°) = cot 22°

અને sec 68° = sec (90° – 22°) = cosec 22°

$\therefore$ 68° + sec 68° = cot 22° + cosec 22°.

નોંધ : *જ્યારે કોટિકોણના ત્રિ-ગુણોત્તરનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે ત્યારે જે ખૂણો 450 થી મોટો હોય તેના માટે જ તેના કોટિકોણનો અનુરૂપ ગુણોત્તર લખાતો હોય છે.*

ઉદાહરણ 22.36: *જો* tan 2A = cot (A – 18°) *જ્યાં* 2A *લઘુકોણ છે.* A *ની કિંમત શોધો.*

ઉકેલ: tan 2A = cot (A – 18°)

$\therefore$ cot (90° – 2A) = cot (A – 18°) ...[cot (90° – 2A = tan 2A]

$\therefore$ 90° – 2A = A – 18°

$\therefore$ 3A = 90° + 18°

$\therefore \quad 3A = 108^\circ$

$\therefore \quad A = 36^\circ$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 22.6

1. *બતાવો કે :*

   (i) $\cos 55^\circ = \sin 35^\circ$

   (ii) $\sin^2 11^\circ - \cos^2 79^\circ = 0$

   (iii) $\cos^2 51^\circ - \sin^2 39^\circ = 0$

2. *નીચેનાની કિંમત શોધો :*

   (i)   (ii) $\dfrac{\tan 65^\circ}{2\cot 25^\circ}$ (iii) $\dfrac{\cos 89^\circ}{3\sin 1^\circ}$

   (iv) $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ$ (v) $\dfrac{3\sin 5^\circ}{\cos 85^\circ} + \dfrac{2\tan 33^\circ}{\cot 57^\circ}$

   (vi) $\dfrac{\cot 54^\circ}{\tan 36^\circ} + \dfrac{\tan 20^\circ}{\cot 70^\circ} - 2$

   (vii) $\sec 41^\circ \sin 49^\circ + \cos 49^\circ \operatorname{cosec} 41^\circ$

   (viii) $\dfrac{\cos 75^\circ}{\sin 15^\circ} + \dfrac{\sin 12^\circ}{\cos 78^\circ} - \dfrac{\cos 18^\circ}{\sin 72^\circ}$

3. *નીચેનાની કિંમત શોધો.*

   (i) $\left(\dfrac{\sin 47^\circ}{\cos 43^\circ}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos 43^\circ}{\sin 47^\circ}\right)^2$

   (ii) $\dfrac{\cos^2 20^\circ + \cos^2 70^\circ}{3\left(\sin^2 59^\circ + \sin^2 31^\circ\right)}$

4. *સાબિત કરો :*

   (i) $\sin\theta \cos(90^\circ - \theta) + \cos\theta \sin(90^\circ - \theta) = 1$

   (ii) $\cos\theta \cos(90^\circ - \theta) - \sin\theta \sin(90^\circ - \theta) = 0$

(iii) $\dfrac{\cos(90^\circ-\theta)}{1+\sin(90^\circ-\theta)}+\dfrac{1+\sin(90^\circ-\theta)}{\cos(90^\circ-\theta)}=2\operatorname{cosec}\theta$

(iv) $\sin(90^\circ-\theta)\cos(90^\circ-\theta)=\dfrac{\tan(90^\circ-\theta)}{1+\tan^2(90^\circ-\theta)}$

(v) $\tan 45^\circ \tan 13^\circ \tan 77^\circ \tan 85^\circ = 1$

(vi) $2\tan 15^\circ \tan 25^\circ \tan 65^\circ \tan 75^\circ = 2$

(vii) $\sin 20^\circ \sin 70^\circ - \cos 20^\circ \cos 70^\circ = 0$

5. સાબિત કરો કે $\sin(50^\circ+\theta)-\cos(40^\circ-\theta)=0$

6. A અને B લઘુકોણ છે. જો $\sin A = \cos B$ હોય, તો સાબિત કરો કે $A + B = 90^\circ$.

7. ΔABC માં સાબિત કરો કે

(i) $\tan\left(\dfrac{B+C}{2}\right)=\cot\left(\dfrac{A}{2}\right)$

(ii) $\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)=\sin\left(\dfrac{C}{2}\right)$

8. $\tan 59^\circ + \operatorname{cosec} 85^\circ$ નું એવા ત્રિ-ગુણોત્તર રૂપમાં રૂપાંતર કરો કે જેના ખૂણાઓનું માપ 0^0 અને 45^0 વચ્ચે હોય.

9. $\sec 46^\circ - \cos 87^\circ$ નું એવા ત્રિ-ગુણોત્તર રૂપમાં રૂપાંતર કરો કે જેના ખૂણાઓનું માપ 0^0 અને 45^0 વચ્ચે હોય.

10. $\sec^2 62^\circ + \sec^2 69^\circ$ નું એવા ત્રિ-ગુણોત્તર રૂપમાં રૂપાંતર કરો કે જેના ખૂણાઓનું માપ 0^0 અને 45^0 વચ્ચે હોય.

પ્રશ્ન 11 અને 12 માં આપેલા વિકલ્પોમાંથી જવાબનો સાચો વિકલ્પ પસંદ કરો.

11. $\dfrac{\sin 40^\circ}{2\cos 50^\circ}-\dfrac{2\sec 41^\circ}{3\operatorname{cosec}49^\circ}$ ની કિંમત .... છે.

(i) -1 (ii) $\dfrac{1}{6}$ (iii) $-\dfrac{1}{6}$ (iv) 1

12. જો $\sin(\theta+36^\circ)=\cos\theta$, જ્યાં $\theta+36^\circ$ એ લઘુકોણ છે, તો $\theta =$..........

(i) 54° (ii) 18° (iii) 21° (iv) 27°

સારાંશ

- *કાટકોણ ત્રિકોણમાં ત્રિ-ગુણોત્તર મૂલ્યો નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરેલા છે.*

$$\sin\,\theta = \frac{\theta \text{ ખૂણાની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{AB}{AC}$$

- *જુદા-જુદા ત્રી-ગુણોત્તરો વચ્ચેનો સંબંધ નીચે મુજબ છે.*

(i) $\tan q =$ (ii) $\cot q = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(iii) $\sec q = \dfrac{1}{\cos\theta}$ (iv) $\text{cosec}\, q = \dfrac{1}{\sin\theta}$

(v) $\cot q = \dfrac{1}{\tan\theta}$

- *ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ નીચે મુજબ છે.*

(i) $\sin^2 q + \cos^2 q = 1$

(ii) $\sec^2 q - \tan^2 q = 1$

(iii) $\text{cosec}^2 q - \cot^2 q = 1$

- જે બે ખૂણાના માપનો સરવાળો 900 હોય, તે ખૂણાઓ એકબીજાના કોટીકોણ કહેવાય છે.
- $\sin(90^\circ - A) = \cos A$, $\cos(90^\circ - A) = \sin A$ અને $\tan(90^\circ - A) = \cot A$.
- $\operatorname{cosec}(90^\circ - A) = \sec A$, $\sec(90^\circ - A) = \operatorname{cosec} A$ અને $\cot(90^\circ - A) = \tan A$

અનુમોદિત વેબસાઈટ

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld:wolfram.com

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. જો $\sin A = \frac{4}{5}$, હોય, તો $\cos A$ અને $\tan A$ ની કિંમત શોધો.

2. જો $\tan A = \frac{20}{21}$, હોય, તો $\operatorname{cosec} A$ અને $\sec A$ ની કિંમત શોધો.

$\frac{5}{4}$

3. જો $\cot\theta = \frac{3}{4}$, હોય, તો $\sin\theta + \cos\theta$ ની કિંમત શોધો.

4. જો $\tan \sec\theta = \frac{m}{n}$, હોય, તો $\sin\theta$ અને $\tan\theta$ ની કિંમત શોધો.

5. જો $\cos\theta = \frac{3}{5}$, હોય, તો $\frac{\sin\theta\tan\theta - 1}{2\tan^2\theta}$ ની કિંમત શોધો.

6. જો $\sec\theta =$, હોય, તો $\frac{\tan\theta}{1+\tan\theta}$ ની કિંમત શોધો.

7. જો $\tan A = 1$ અને $\tan B = \sqrt{3}$ હોય, તો $\cos A\cos B - \sin A\sin B$ ની કિંમત શોધો.

   પ્રશ્ન 8 થી 20 માં નિત્યસમ સાબિત કરો.

8. $(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sin\theta) = \cos\theta$.

9. $\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = \frac{\operatorname{cosec}\theta}{\sec\theta}$

10. $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = (\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)^2$

11.

12.

13.

14. $\sqrt{\dfrac{\operatorname{cosec} A+1}{\operatorname{cosec} A-1}}=\dfrac{\cos A}{1-\sin A}$

15. $\sin^3 A-\cos^3 A=(\sin A-\cos A)\,(1+\sin A\cos A)$

16. $\dfrac{\cos A}{1-\tan A}+\dfrac{\sin A}{1-\cot A}=\cos A+\sin A$

17.

18. $(\operatorname{cosec} A-\sin A)(\sec A-\cos A)=\dfrac{1}{\tan A+\cot A}$

19. $(1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta)\,(1+\tan\theta+\sec\theta)=2$

20. $2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+1=0$

21. જો $\sec\theta+\tan\theta=p$, તો સાબિત કરો કે $\sin\theta=\dfrac{p^2-1}{p^2+1}$

22. સાબિત કરો કે $\dfrac{\cos(90^\circ-A)}{1+\sin(90^\circ-A)}+\dfrac{1+\sin(90^\circ-A)}{\cos(90^\circ-A)}=2\sec(90^\circ-A)$

23. સાબિત કરો કે $\dfrac{\sin(90^\circ-A)\cos(90^\circ-A)}{\tan A}=\sin^2(90^\circ-A)$

24. જો $\tan q=\dfrac{3}{4}$ અને $\theta+a=90^\circ$, હોય, તો $\cot a$ ની કિંમત શોધો.

25. જો $\cos(2\theta+54^\circ)=\sin\theta$ અને $(2\theta+54^\circ)$ હોય, તો θ ની કિંમત શોધો.

26. જો $\sec Q=\operatorname{cosec} P$ અને P તથા Q લઘુકોણ હોય, તો સાબિત કરો કે $P+Q=90^\circ$.

તમારી પ્રગતિ ચકાસોના જવાબ

22.1

1\. (i) $\sin\theta = \frac{5}{13}, \cos\theta = \frac{12}{13}, \tan\theta = \frac{5}{12}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}, \sec\theta = \frac{13}{12}$ અને $\cot\theta = \frac{12}{5}$

(ii) $\sin\theta = \frac{3}{5}, \cos\theta = \frac{4}{5}, \tan\theta = \frac{3}{4}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{3}, \sec\theta = \frac{5}{4}$ અને $\cot\theta = \frac{4}{3}$

(iii) $\sin\theta = \frac{24}{25}, \cos\theta = \frac{7}{25}, \tan\theta = \frac{24}{7}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{25}{24}, \sec\theta = \frac{25}{7}$ અને $\cot\theta = \frac{7}{24}$

(iv) $\sin\theta = \frac{4}{5}, \cos\theta = \frac{3}{5}, \tan\theta = \frac{4}{3}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{4}, \sec\theta = \frac{5}{3}$ અને $\cot\theta = \frac{3}{4}$

2\. $\sin A = \frac{5}{\sqrt{41}}, \cos A = \frac{4}{\sqrt{41}}$ અને $\tan A = \frac{5}{4}$

3\. $\sin C = \frac{40}{41}, \cot C = \frac{9}{40}, \cos A = \frac{40}{41}$ અને $\cot A = \frac{40}{9}$

4\. $\sec C = \sqrt{2}, \operatorname{cosec} C = \sqrt{2}$ અને $\cot C = 1$

5\. (iv)

6\. (ii)

22.2

1. $\sin C = \frac{3}{5}$, $\cos C = \frac{4}{5}$ અને $\tan C = \frac{3}{4}$

2. $\sin A = \frac{24}{25}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{25}{24}$ અને $\cot A = \frac{7}{24}$

3. $\sec P = \sqrt{2}$, $\cot P = 1$, અને $\operatorname{cosec} P = \sqrt{2}$

4. $\tan R = \sqrt{3}$, $\operatorname{cosec} R = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sin P = \frac{1}{2}$ અને $\sec P = \frac{2}{\sqrt{3}}$

૫. $\cot \theta = \frac{24}{7}$, $\sin \theta = \frac{7}{25}$, $\sec \theta = \frac{25}{24}$, અને $\tan \theta = \frac{7}{24}$

6. $\sin P = \frac{2\sqrt{6}}{7}$, $\cos P = \frac{5}{7}$, $\sin R = \frac{5}{7}$ અને $\cos R = \frac{2\sqrt{6}}{7}$, $\sin P - \cos R = 0$

7. (iii)

22.3

1. $\cos \theta = \frac{21}{29}$ અને $\tan \theta = \frac{20}{21}$

2. $\sin \theta = \frac{24}{25}$ અને $\cos \theta = \frac{7}{25}$

3. $\sin \theta = \frac{24}{25}$ અને $\tan \theta = \frac{24}{7}$

4. $\cot \theta = \frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}}$ અને $\operatorname{cosec} \theta = \frac{n}{\sqrt{n^2 - m^2}}$

5. $-\frac{256}{135}$

6. $\frac{27}{8}$

7. $\sin B = \frac{2}{\sqrt{13}}$ અને $\tan B = \frac{2}{3}$

11. (ii)

22.4

1. $\cot\theta = \sqrt{3}$ અને $\sec\theta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

2. $\dfrac{3}{4}$

3. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. $\sin A = \dfrac{1}{2}$ અને $\tan A = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

5. $-\dfrac{14}{3}$

22.5

17. (iii)

18. (ii)

19. (i)

20. (iii)

22.6

1. (i) 3 (ii) $\dfrac{1}{2}$ (iii) $\dfrac{1}{3}$ (iv) 0

   (v) 5 (vi) 0 (vii) 2 (viii) 1

3. (i) 2 (ii) $\dfrac{1}{3}$

8. $\cot 31^\circ + \sec 5^\circ$

9. $\text{cosec } 44^\circ - \sin 3^\circ$

10. $\text{cosec}^2 28^\circ + \text{cosec}^2 21^\circ$

11. (ii)

12. (iv)

સત્રાંત સ્વાધ્યાના જવાબો

1. $\cos A = \frac{3}{5}$ અને $\tan A = \frac{4}{3}$

2. $\operatorname{cosec} A = \frac{29}{20}$ અને $\sec A = \frac{29}{21}$

3. $\frac{7}{5}$

4. $\sin\theta = \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{m}$ અને $\tan\theta = \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{n}$

5. $\frac{3}{160}$

6. $\frac{3}{7}$

7. $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

24. $\frac{3}{4}$

25. 12°