23

કેટલાક વિશિષ્ટ ખૂણાઓ માટેના ત્રિ-ગુણોત્તરો

કેટલાક વિશિષ્ટ ખૂણાઓ માટેના ત્રિ-ગુણોત્તરો

છેલ્લા પાઠમાં (પ્રકરણમાં) આપણે કાટકોણ ત્રિકોણના લઘુકોણ માટેના ત્રિ-ગુણોત્તરો વ્યાખ્યાયિત કર્યા એ તેમની વચ્ચેના સબંધો પ્રસ્થાપિત કર્યા. આ પાઠમાં આપણે ભૂમિતિના નિયમોનો ઉપયોગ કરીને $30^\circ, 40^\circ, 45^\circ$ અને 60° ના ખૂણાના ત્રિ-ગુણોત્તર મેળવીશુ 0° અને 90° ના ત્રિગુણોત્તર પણ મેળવીશું 0° અને 90° ના કેટલાક ત્રિ-ગુણત્તર વ્યાખ્યીયિત થઈ શકતા નથી તેની જાણકારી મેળવીશું પદાર્થની ઊંચાઈ અને બે પદાર્થો વચ્ચેના અંતરના લગતા કૂટ પ્રશ્નો પણ ત્રિ-ગુણોત્તરની મદદથી ઉકેલીશું

હેતુઓ

sin C / tan C = ∠C ... બાજુ / ∠C ... પછી અધ્યેતા :

- $30^\circ, 40^\circ, 45^\circ$ અને 60° ના ખૂણાઓ માટેના ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તર મેળવી શકશે.
- 0° અને 90° ના ખૂણાઓ માટેના ક્યા ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તર વ્યાખ્યાયિત કરી શકાયા નથી .
- 0° અને 90° ના ખૂણાઓ માટેના ક્યા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો વ્યાખ્યિત કરી શકાયા નથી તે કહી શકાશે .
- રોજબરોજ ઊંચાઈ અને અંતરને લગતા કૂટ પ્રશ્નો ઉકેલી શકશે.

અપંક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન :

પાયથા ગોરસ પ્રમેય એટલે કે B આગળ કાયકોણ હોય , એવા કાટકોણ $\angle$ ABC માટે

$AC^2 = AB^2 + BC^2$.

$$\sin C = \frac{\angle C \text{ ની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}},$$

,

અને

$$\ddot{E} = \quad , \sec C = \frac{1}{\cos C} \text{ અને } \cot C = \frac{1}{\tan C}$$

- sin (90° – q) = cos q, cos (90° – q) = sin q

  tan (90° – q) = cot q, cot (90° – q) = tan q

- sec (90° – q) = cosec q and cosec (90° – q) = sec q

23.1 45° ના ખૂણા માટેના ત્રિ-ગુણોત્તરો

ધારોકે OA કિરણ 0 થી શરૂ કરીને ઘડિયાયાળના કાંટાની ફરવાની દિશાથી વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરે છે અને Ox અક્ષ સાથે 45° નો ખૂણો બનાવે છે. (આકૃતિ 23.4)

OA પર કોઈ બિંદુ P લો

PM ⊥ OX. દોરો

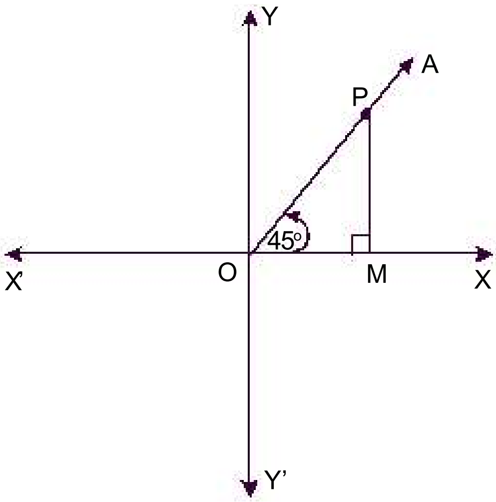
$\angle POM + \angle OPM + \angle PMO = 180$

$45^\circ + \angle OPM + 90^\circ = 180^\circ$

$\angle OPM = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

$\therefore \quad \Delta PMO, \angle \angle OPM = \angle POM = 45^\circ$

$\therefore \quad OM = PM$



આકૃતિ. 23.1

ધારોકે OM = a એકમ છે

કાટકોણ ΔPMO, માં

$OP^2 = OM^2 + PM^2$ (પાયથાગોરસ પ્રમેય)

$= a^2 + a^2$

$= 2\, a^2$

$\therefore \quad OP = \sqrt{2}\, a$ એકમ

હવે $\quad 45^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 45^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

કેટલાક વિશિષ્ટ ખૂણાઓ માટેના ત્રિ-ગુણોત્તરો

$$\tan 45^o = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\text{cosec } 45^o = \frac{1}{\sin 45^o} = \frac{1}{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\sec 45^o = \frac{1}{\cos 45^o} = \frac{1}{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

અને $$\cot 45^o = \frac{1}{\tan 45^o} = \frac{1}{1} = 1$$

23.2 30^o ના ખૂણા માટેના ત્રિ-ગુણોત્તરો

ધારોકે OA કિરણ 0 થી શરૂ કરીને ઘડિયાળના કાંટાની ફરવાની દિશાથી વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરે છે અને Ox અક્ષ સાથે 45^o નો ખૂણો બનાવે છે. (આકૃતિ 23.2)

OA પર કોઈ બિંદુ Ox લો PM ⊥ OX દોરો અને (

રીતે લંબાવો કે જેથી P થાય PM = P′M જોડો

અને ΔPMO અને DP′MO, માં

OM = OM ...(સામાન્ય)

$\angle PMO = \angle P'MO = 90^o$

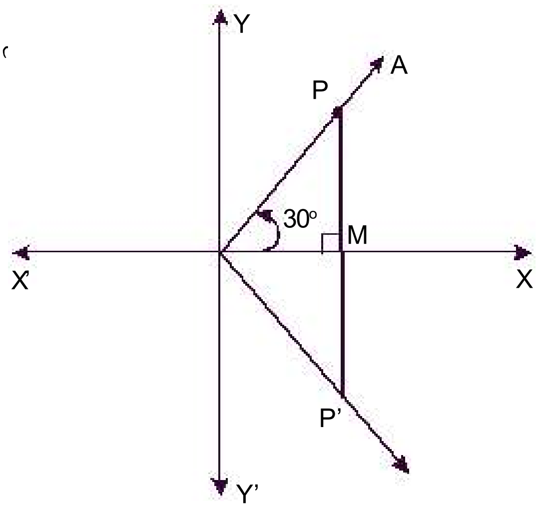
અને PM = P′M ...(રચના)

ΔPMO ≅ DP′MO

$\angle OPM = \angle OP'M = 60^o$

OPP′ સમબાજુ ત્રિકોણ

OP = OP′



આકૃતિ. 23.2

ધારોકે PM = a એકમ

PP′ = PM + MP′

= $(a + a)$ એકમ ...($\because$ MP′ = MP)

= $2a$ એકમ

OP = OP′ = PP′ = $2a$ એકમ

હવે કાટકોણ PMO, માં

$OP^2 = PM^2 + OM^2$ ...(પાયથાગોરસ પ્રમેય)

$(2a)^2 = a^2 + OM^2$

$OM^2 = 3a^2$

$OM = \quad a$ એકમ

$$\sin 30^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{cosec } 30^\circ = \frac{1}{\sin 30^o} = \frac{1}{1/2} = 2$$

$$\sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^o} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

and $$\cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^o} = \frac{1}{1/\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

23.3 60^O ના ખૂણા માટેના ત્રિ-ગુણોત્તરો

'ધારોકે OA કિરણ OX થી શરૂ કરીને ઘડિયાળના કાંટાની ફરવાની દિશાથી વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરે છે અને અક્ષ સાથે 60° નો ખૂણો બનાવે છે. (આકૃતિ 23.2)

OA પર કોઈ બિંદુ P લો $PM \perp OX$ દોરો કિરણ OX પર M′ થાય બિંદુ એવું મેળવો કે જેથી

OM = MM′ PM′ જોડો

OM = a એકમ

એકમPMO અને DPMM′,

PM = PM ...(સામાન્ય)

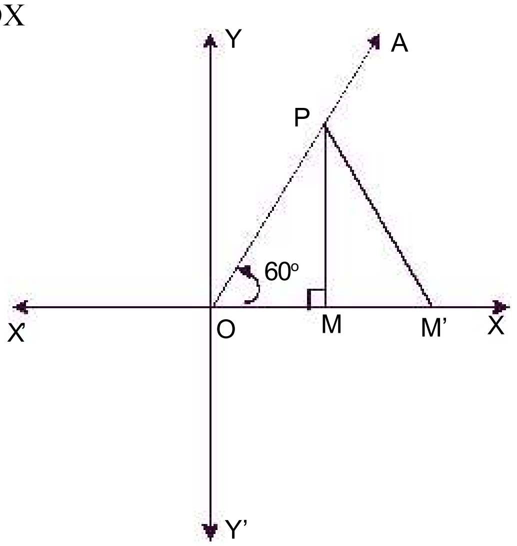
$\angle PMO = \angle PMM'$ ...= 90°)

OM = MM′ ...(રચના)

$DPMO \cong DPMM'$

$\angle$ POM = $\angle$ PM¢M = 60°

DPOM¢ is an equilateral triangle.



આકૃતિ. **23.3**

$OP = PM' = OM' = 2a$ એકમ

હવે Δ PMO,

$OP^2 = PM^2 + OM^2$ ...(પાયથાગોરસ પ્રમેય)

$(2a)^2 = PM^2 + a^2$

$PM^2 = 3a^2$

$PM = \sqrt{3}\,a$ એકમ

$$\sin 60^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{1}{\sin 60^o} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^o} = \frac{1}{1/2} = 2$$

and $$\cot 60^\circ = \frac{1}{\tan 60^0} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

23.4 0^O અને 90^Oમાટેના ત્રિ-ગુણોત્તરો

આપણે વિભાગ 23.4, 23.5 અને 23.6માં 45°,30°,અને 60°,માટેના ત્રિ-ગુણોત્તરો વ્યાખ્યાયિત કર્યા 0°, અને 90°,માટે આપણે નીચેના પરિણામો સ્વીકારી લઈશું અને એ માટે તાર્કિક સાબિતીની ચર્ચા કરીશું નહી.

(i) $\sin 0^\circ = 0$ અને તેથી 0° વ્યાખ્યાયિત થશે નહીં. કારણ કે 0 વ્યસ્ત અસ્તિત્વમાં નથી.

(ii) $\cos 0^\circ = 1$ અને તેથી $\sec 0^\circ = 1$

(iii) $\tan 0^\circ = 0$ અને તેથી $\sec 0^\circ$ વ્યાખ્યાયિત થશે નહી કારણકે 0નો વ્યસ્ત અસ્તિતિવમાં નથી.

(iv) $\sin 90^\circ = 1$ અને તેથી $\operatorname{cosec} 90^\circ = 1$

(v) $\cos 90^o = 0$ અને તેથી $\sec 90^o$ વ્યાખ્યાયિત થશે નહી કારણકે 0નો વ્યસ્ત અસ્તિત્વમાં નથી.

(vi) $\cot 90^o = 0$ અને તેથી 90^o વ્યાખ્યાયિત થશે નહી કારણકે 0નો વ્યસ્ત અસ્તિત્વમાં નથી.

$0^o, 30^o, 45^o, 60^o$ અને 90^o અને માટેના ત્રિ-ગુણોત્તરોનાં મૂલ્યો દર્શાવવા માટે એક કોઠા તૈયાર કરીએ જેથી તેનો ઉપયોગ સરળ બને. નીચેના કોઠા એ રીતે તૈયાર કર્યો છે (એ રીતે લખ્યો છે) જેથી તે યાદ રાખવામાં પણ રહેલું બને .

ત્રિ - ગુણોત્તર	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
sin q	$\sqrt{\frac{0}{4}} = 0$	$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{4}{4}} = 1$
cos q	$\sqrt{\frac{4}{4}} = 1$	$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{0}{4}} = 0$
tan q	$\sqrt{\frac{0}{4-0}} = 0$	$\sqrt{\frac{1}{4-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{4-2}} = 1$	$\sqrt{\frac{3}{4-3}} = \sqrt{3}$	વ્યાખ્યાયિત નથી
cot q	વ્યાખ્યાયિત નથી	$\sqrt{\frac{3}{4-3}} = \sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{2}{4-2}} = 1$	$\sqrt{\frac{1}{4-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{0}{4-0}} = 0$
cosec q	વ્યાખ્યાયિત નથી	$\sqrt{\frac{4}{1}} = 2$	$\sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{2}$	$\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{4}{4}} = 1$
sec q	$\sqrt{\frac{4}{4}} = 1$	$\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{2}$	$\sqrt{\frac{4}{1}} = 2$	વ્યાખ્યાયિત નથી

શૂન્ય વડે ભાગાકાર વ્યાખ્યાયિત નથી તેથી આ પરિણામો વ્યાખ્યાયિત નથી.

આ ત્રિ- ગુણોત્તરોનો ઉપયોગ થતો હોય એવા કેટલાક ઉદાહરણ જોઈએ

ઉદાહરણ23.1: $\cos^2 60^o - \sin^2 30^o$ ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $60^o = \sqrt{3}$ અને $\sin 30^o = \frac{1}{2}$

$$\tan^2 60^o - \sin^2 30^o = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$$

ઉદાહરણ **23.2:** *કિંમત શોધો.*

$$\cot^2 30^\circ \sec^2 45^\circ + \operatorname{cosec}^2 45^\circ \cos 60^\circ$$

ઉકેલ : *આપણે જાણીએ છીએ કે*

$$\cot 30^\circ = \sqrt{3},\ \sec 45^\circ = \sqrt{2},\ \operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2} \text{ અને } \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cot^2 30^\circ \sec^2 45^\circ + \operatorname{cosec}^2 45^\circ \cos 60^\circ$$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^2 \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 . \frac{1}{2}$$

$$= 3 \times 2 + 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 6 + 1$$

$$= 7$$

ઉદાહરણ **23.3:** *કિંમત શોધો* : $2(\cos^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ) - 6(\sin^2 45^\circ - \tan^2 30^\circ)$

ઉકેલ : $2(\cos^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ) - 6(\sin^2 45^\circ - \tan^2 30^\circ)$

$$= 2\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2\right] - 6\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + 3\right) - 6\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 1 + 6 - 3 + 2$$

$$= 6$$

ઉદાહરણ **23.4:** *સાબિત કરો*

$$\frac{\tan 45^\circ}{\operatorname{cosec} 30^\circ} + \frac{\sec 60^\circ}{\cot 45^\circ} - \frac{5 \sin 90^\circ}{2 \cos 0^\circ} = 0$$

ઉકેલ : *ડા.બા* $= \dfrac{\tan 45^\circ}{\operatorname{cosec} 30^\circ} + \dfrac{\sec 60^\circ}{\cot 45^\circ} - \dfrac{5 \sin 90^\circ}{2 \cos 0^\circ}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{1} - \frac{5 \times 1}{2 \times 1}$$

$$=\frac{1}{2}+2-\frac{5}{2}$$

$$=0=\text{જ.બા.}$$

આમ, $\frac{\tan 45^\circ}{\operatorname{cosec} 30^\circ}+\frac{\sec 60^\circ}{\cot 45^\circ}-\frac{5\sin 90^\circ}{2\cos 0^\circ}=0$

ઉદાહરણ **23.5:** *સાબિત કરોકે :-*

$$\frac{4}{3}\cot^2 30^\circ+3\sin^2 60^\circ-2\operatorname{cosec}^2 60^\circ-\frac{3}{4}\tan^2 30^\circ=\frac{10}{3}$$

ઉકેલ: ડા.બા $=\frac{4}{3}\cot^2 30^\circ+3\sin^2 60^\circ-2\operatorname{cosec}^2 60^\circ-\frac{3}{4}\tan^2 30^\circ$

$$=\frac{4}{3}\times\left(\sqrt{3}\right)^2+3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$=\frac{4}{3}\times 3+3\times\frac{3}{4}-2\times\frac{4}{3}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}$$

$$=4+\frac{9}{4}-\frac{8}{3}-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{48+27-32-3}{12}$$

$$=$$

$$=\text{જ.બા}$$

તેથી, $\frac{4}{3}\cot^2 30^\circ+3\sin^2 60^\circ-2\operatorname{cosec}^2 60^\circ-\frac{3}{4}\tan^2 30^\circ=\frac{10}{3}$

ઉદાહરણ **23.6 :** *સાબિત કરો કે*

$$\frac{4\cot^2 60^\circ+\sec^2 30^\circ-2\sin^2 45^\circ}{\cos^2 30^\circ+\cos^2 45^\circ}=\frac{4}{3}$$

ઉકેલ : *ડા.બા* $=\frac{4\cot^2 60^\circ+\sec^2 30^\circ-2\sin^2 45^\circ}{\cos^2 30^\circ+\cos^2 45^\circ}$

$$= \frac{4.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{4\times\frac{1}{3}+\frac{4}{3}-2\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{8}{3}-1}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{4}}$$

$$= \frac{5}{3}\times\frac{4}{5} = \frac{4}{3}$$

= જ.બા.

તેથી , $$\frac{4\cot^2 60^\circ + \sec^2 30^\circ - 2\sin^2 45^\circ}{\cos^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ} = \frac{4}{3}$$

ઉદાહરણ 23.7: $= 30^\circ$, લઈને સાબિત કરો કે

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

ઉકેલ : $q = 30^\circ$

L.H.S. = $\tan 2q$

$= \tan (2 \times 30^\circ)$

$= \tan 60^\circ$

$= \sqrt{3}$

અને જ.બા $= \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

નોંધ

$$= \frac{2\tan 30^o}{1-\tan^2 30^o}$$

$$= \frac{2.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \sqrt{3}$$

ડા.બા = જ.બા

તેથી, $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

ઉદાહરણ 23.8: $A = 30^o$. તો

$$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$$

ઉકેલ : For $A = 30^o$,

$$\text{L.H.S.} = \sin 3A$$

$$= \sin(3 \times 30^o)$$

$$= \sin 90^o$$

$$= 1$$

અને $\text{R.H.S.} = 3\sin A - 4\sin^3 A$

$$= 3\sin 30^o - 4\sin^3 30^o$$

$$= 3 \times \frac{1}{2} - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{4}{8}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= 1$$

L.H.S. = R.H.S.

અને જ.બા $3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

ઉદાહરણ 23.9: *જો* $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$, *તો* $\sin 15^\circ$ *ની કીંમત શોધો.*

ઉકેલ : $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ ...(i)

Let $A = 45^\circ$ and $B = 30^\circ$

માં કિંમત મૂકતા (i),

$$\sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}.$$

નોંધ *: ઉપરના ઉદાહરણ માં* $A = 60^\circ$ *અને* $B = 45^\circ$.

ઉદાહરણ 23.10: $\sin(A + B) = 1$ *અને* $\cos(A - B) = 1$, $0^\circ < A + B$ £ 90°, A ³ B, find A *અને* B.

ઉકેલ : $\because$ $\sin(A + B) = 1 = \sin 90^\circ$

$\therefore$ $A + B = 90^\circ$ ...(i)

પરિણામ $\cos(A - B) = 1 = \cos 0^\circ$

$\therefore$ $A - B = 0^\circ$ ...(ii)

પરિણામ (i) *અને* (ii), *નોસરવાળો કરતા*

$2A = 90^\circ$ or $A = 45^\circ$

(ii), *પરથી*

$B = A = 45^\circ$

$A = 45^\circ$ $B = 45^\circ$

ઉદાહરણ 23.11: If $\cos(20^\circ + x) = \sin 30^\circ$, x.

ઉકેલ : $\cos(20^\circ + x) = \sin 30^\circ = \quad = \cos 60^\circ$ $\quad \ldots\left(\because \cos 60^\circ = \frac{1}{2}\right)$

$$20^\circ + x = 60^\circ$$

$$x = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$$

$$x = 40^\circ$$

ઉદાહરણ 23.12: *કાટકોણ* ΔABC, *માં* B, BC = 5 *સેમી*, $\angle BAC = 30^\circ$, *હોય તો* AB *અને* AC.

ઉકેલ : $\angle BAC = 30^\circ$ *પક્ષ* $\angle A = 30^\circ$

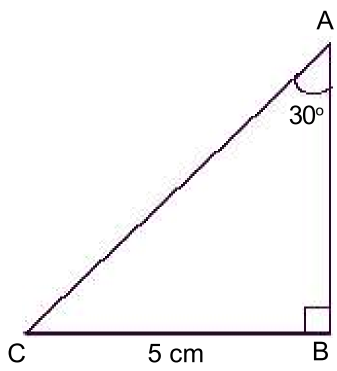
અને BC = 5 *સેમી*

Now $\quad \sin A = \frac{BC}{AC}$

or $\quad \sin 30^\circ = \frac{5}{AC}$

or $\quad \frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$

$AC = 2 \times 5$ or 10 *સેમી*



આકૃતિ. 23.4

$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$$

$$= \sqrt{(10)^2 - 5^2} \text{ સેમી}$$

$$= \sqrt{75} \text{ સેમી}$$

$$= 5\sqrt{3} \text{ સેમી}$$

Hence AC = 10 *સેમી અને* AB = $5\sqrt{3}$ *સેમી*

ઉદાહરણ 23.13: ΔABC, *કાટખૂણો છે જો* C, AC = 4 *સેમી અને* AB = 8 *સેમી*. Find $\angle A$ *અને* $\angle B$. *હોય તો નીચેવાની કિંમત શોધો*.

ઉકેલ : *પક્ષ*, AC = 4 *સેમી અને* AB = 8 *સેમી*

હવે $\quad \sin B = \frac{AC}{AB}$

$= \frac{4}{8}$ or $\frac{1}{2}$ $B = 30^o$

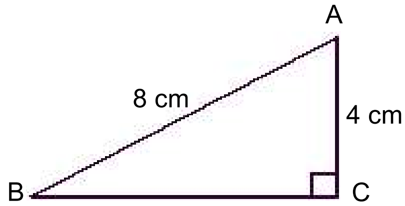
$\ldots\left[\because \sin 30^o = \frac{1}{2}\right]$

હવે $\angle A = 90^o - \angle B$

$\ldots\left[\because \angle A + \angle B = 90^o\right]$

$= 90^o - 30^o$

$= 60^o$



આકૃતિ. 23.5

Hence, $\angle A = 60^o$ - $\angle B = 30^o$

ઉદાહરણ **23.14:** Δ ABC માં કાટખૂણ છે. B. If $\angle A = \angle C$,હોય તો નીચેની કિંમત શોધો.

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

(ii) $\sin A \sin B + \cos A \cos B$

ઉકેલ : કાટખૂણ છે. Δ ABC,

$\angle B = 90^o$

$\because \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\angle A + \angle C = 180^o - 90^o$ ...($\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$)

$= 90^o$

$\angle A = \angle C$

$\angle A = \angle C = 45^o$

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

$= \sin 45^o \cos 45^o + \cos 45^o \sin 45^o$

$=$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

(ii) $\sin A \ \sin B + \cos A \cos B$

$= \sin 45^o \sin 90^o + \cos 45^o \cos 90^o$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ઉદાહરણ **23.15:** જો x હોય તો $2x - \sqrt{3} = 0$. ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ **:** $\tan 2x - \sqrt{3} = 0$

$\tan 2x = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$

$2x = 60^\circ$

or $x = 30^\circ$

x is 30°.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 23.1

1. નીચેની કિંમત શોધો.

(i) $\sin^2 60^\circ + \cos^2 45^\circ$

(ii) $2 \sin^2 30^\circ - 2 \cos^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ$

(iii) $4 \sin^2 60^\circ + 3 \tan^2 30^\circ - 8 \sin^2 45^\circ \cos 45^\circ$

(iv) $4(\sin^4 30^\circ + \cos^4 60^\circ) - 3(\cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 45^\circ)$

(v) $\dfrac{\tan 45^\circ}{\operatorname{cosec} 30^\circ} + \dfrac{\sec 60^\circ}{\cot 45^\circ} - \dfrac{5 \sin 90^\circ}{2 \cos 0^\circ}$

(vi) $\dfrac{5 \cos^2 60^\circ + 4 \sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$

2. નીચેની દરેક સાબિત કરો :

(i) $\operatorname{cosec}^3 30^\circ \times \cos 60^\circ \times \tan^3 45^\circ \times \sin^2 90^\circ \times \sec^2 45^\circ \times \cot 30^\circ = 8\sqrt{3}$

(ii) $\tan^2 30^\circ + \dfrac{1}{2}\sin^2 45^\circ + \dfrac{1}{3}\cos^2 30^\circ + \cot^2 60^\circ = \dfrac{7}{6}$

(iii) $\cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ = -\cos 60^\circ$

(iv) $4(\sin^4 30^\circ + \cos^4 60^\circ) - 3(\cos^2 45^\circ - \sin^2 90^\circ) = 2$

(v) $\dfrac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ} = \tan 30^\circ$

3. જો $\angle A = 30^\circ$, તો નીચેના દરેક સાબિત કરો.

(i) $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

(ii) $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

(iii) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

4. $A = 60^\circ$ અને $B = 30^\circ$,તો નીચેના દરેક ચકાસો .

(i) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

(ii) $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1+\tan A\tan B}$

5. $2A = 60^\circ$, લઈને તથા $\sin 30^\circ \cos 30^\circ$, અને $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ નો ઉપયોગ કરીને શોધો.

6. જો $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$, હોય તો $\cos 75^\circ$ શોધો.

7. જો $\sin(A-B) = \dfrac{1}{2}$, $\cos(A+B) = \dfrac{1}{2}$, $0^\circ < A+B < 90^\circ$, $A > B$,હોય તો A અને B શોધો.

અને

8. $\sin(A+2B) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ અને $\cos(A+4B) = 0$,હોય તો A અને B શોધો.

9. $\angle PQR$ કાટખૂણો છે Q, PQ = 5 સેમી અને $\angle R = 30^\circ$,હોય તો QRઅને PR શોધો.

10. $\angle ABC$, $\angle B = 90^\circ$, AB = 6 સેમી અને AC = 12 સેમી. હોય તો $\angle A$ અને $\angle C$ શોધો.

11. $\angle ABC$, $\angle B = 90^\circ$. If $A = 30^\circ$,હોય તો $\sin A\cos B + \cos A\sin B$ શોધો.

12. $\cos(40^\circ + 2x) = \sin 30^\circ$, હોય તો x શોધો.

પ્રશ્ન 13 થી 15માં આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરો

13. $\sec 30^\circ =$................

(A) 2 (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{2}$

14. $\sin 2A = 2\sin A$, હોય તો A ....

(A) 30° (B) 0° (C) 60° (D) 90°

15. $\dfrac{2\tan 60^o}{1+\tan^2 60^o}$ ....

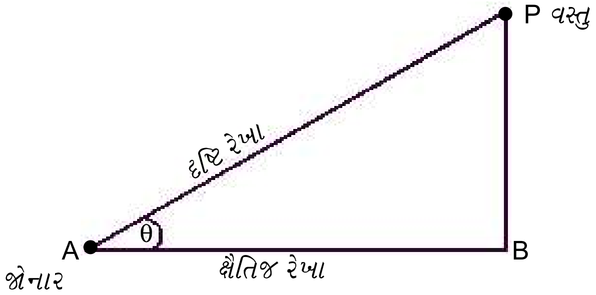
(A) sin 60o (B) sin 30o (C) cos 60o (D) tan 60o

23.5 ત્રિકોણમિતિના ઉપયોગ

આપણે ખૂણાના ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરોની વ્યાખ્યા વિશે શીખ્યા 30^o,45^o, અને 60^o, ના ખૂણાના વ્યાખ્યિત થયેલા ત્રિ-ગુણોત્તરોની કિંમત મેળતાં શીખ્યા 0^o અને 90^o ના વ્યાખ્યાયિત થયેલા ત્રિ-ગુણોત્તરો પણ સમજવા આ વિભાગમાં આપણે ત્રિકોણમિતિના ઉપયોગથી બે પદાર્થો વચ્ચેનું અંતર શોધવાના પદાર્થની ઊંચાઈ શોધવાના વ્યવહારિક ગણીશું ઊંચાઈ અને અંતરની ગણતરી કરતાં પહેલા કેટલાક પદોની વ્યાખ્યા સમજીશું.

23.5.1 ઉત્સેધકોણ અથવા ઉજાતકોણ

જોનારા વ્યક્તિ ઊંચા સ્થળે રહેલી વસ્તુ P ને જુએ છે ત્યારે તેણે તેની આંખ ઊંચી કરવી પડે છે. પરિણામે ક્ષૈતિજ રેખા (પૃથ્વીની સપાટીને સમાંતર રેખા) અને દષ્ટિકોણ વચ્ચે એખ ખૂણા રચાય છે આ ખૂણાને ઉત્સેધ કોણ અથવા ઉન્નકોણ કહે છે.

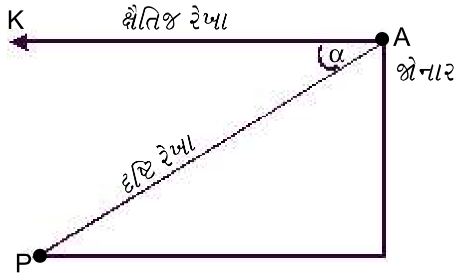


આકૃતિ. 23.6

આકૃત્તિ 23.6માં એ જોનારા વ્યક્તિ છે , પી જોવાની વસ્તુ છે એપી દષ્ટિરેખા છે અને એબી ક્ષૈત્રિજ રેખા છે અહીં. ક્યુ ખૂણો એ ઉત્સેધકોણ અથવા ઉન્નત કોણ છે.

23.5.2 અવેસેધ કોણ અથવા અવનત કોણ

અવસેધ કોણ અથવા અવનત કોણ જ્યારે અવલોકન કરો A (ઉંચાઈ ઉપરથી) નીચેની તરફ કોઈ વસ્તુ જોતો હોય ત્યારે આંખનીચે તરફ નમાવવી પડે છે. પરિણામે ક્ષૈતિજ રેખા અને દષ્ટિકોણ વડે રચાતા ખૂણાને અવસેધ કોણ અથવા અવનત કોણ કહે છે આકૃત્તિ 20.7માં A જોનારા વ્યક્તિ છે P જોવાની વસ્તુ છે અને AP દષ્ટિકોણ રેખા છે અને A કે ક્ષૈતિજ રેખા છે અહી ખૂણો એ અવસેધ કોણ અથવા અવનત કોણ છે.



આકૃતિ. 23.7

ઉદાહરણ 23.16: *ઘરની બારીએ ઢળતી એક સીડી જમીન સાથે 60^o નો ખૂણો બનાવે છે જો સીડીની લંબાઈ 6મી હોય તો તેના છેડો કેટલો દૂર હશે ?*

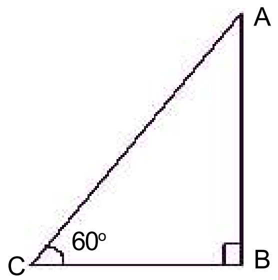
ઉકેલ : *ધારે કે AC દીવાલ છે. જમીન અને સીડી વચ્ચે 60^o ખૂણો બને છે અહી AC = 6 મીટર (પક્ષ)*

કાટકોણ ABC માં

$$\frac{BC}{AC} = \cos 60^\circ$$

$$\frac{BC}{6} = \frac{1}{2}$$

$$BC = \frac{1}{2} \times 6 \text{ or } 3 \text{ m}$$



આકૃતિ. 23.8

સીડીનો જમીન પરનો છેડો દીવલથી 3 મી. દુર હશે.

ઉદાહરણ 23.17: એક સ્તંભ કરતાં તેનો પડછાયો $\frac{1}{\sqrt{3}}$ છે બતાવો કે આ વખતે સૂર્યનો ઉત્સેધ કોણ 60°હશે.

ઉકેલ : ધારોકે AB જમીનને કાટખૂણો ઉભેલો (ખોડેલો) સ્તંભ છે અને BC તેનો પડછાયો છે.

$BC = h \times \frac{1}{\sqrt{3}}$ એકમ

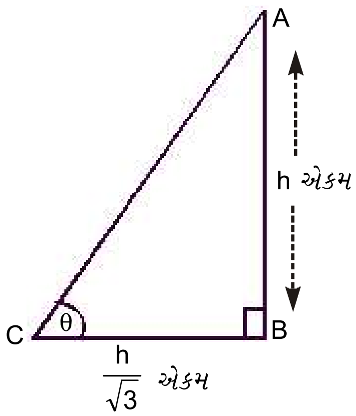
$\Delta ABC,$

ધારોકે સૂર્યનો ઉત્લેધકોણ 0 છે

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC} = \frac{h}{h/\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\tan q = \tan 60^\circ$$

$$q = 60^\circ$$



આકૃતિ. 23.9

સૂર્યનો ઉત્સેધકોણ 60° હશે.

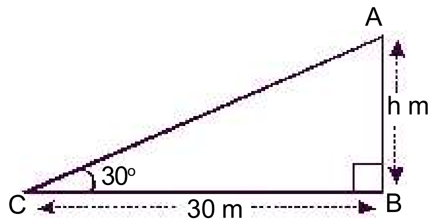
ઉદાહરણ 23.18: એક મિનારો જમીન સાથે કાટખૂણો બનાવે છે.ટાવરના તળીએથી 30 મીટર દૂરના સ્થળેથી જોતાં મિનારીની ટોચનો ઉત્સેધ કોણ 30 માલુમ પડે છે મિનારાની ઊંચાઈ શોધો. $\sqrt{3}$ = 1.73)

ઉકેલ : ધારોકે મિનારાની ઊંચાઈ 4 મીટર છે. જમીન પર B થી 30મી દૂર C છે BC =30

$$\angle ACB = 30^\circ$$

કાટકોણ $\Delta ABC,$

$$\frac{AB}{BC} = \tan 30o$$



આકૃતિ. 23.10

$$\frac{h}{30} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{30}{\sqrt{3}} \text{ મીટર}$$

$$= \frac{30}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \text{ મીટર}$$

$$= 10\sqrt{3} \text{ મીટર}$$

$$= 10 \times 1.73 \text{ મીટર}$$

$$= 17.3 \text{ મીટર}$$

મિનારાની ઊંચાઈ = 17.3 મીટર થાય.

ઉદાહરણ 23.19: એક બલુન 100 મીટર લાંબા કેબલ (પાયર) થી મેટ્રોલોજિકલ ગ્રાઉન્ડ સ્ટેશન સાથે જોડાયેલું છે. આ કેબલ જમીન સાથે 60 નો ખૂણો બનાવે છે. બલૂનની ઊંચાઈ શોધો.

(કેબલ સખત રીતે ખેંચાયેલો છે)

ઉકેલ : આકૃતિ 23.11મા .. બલૂનનું સ્થાન દર્શાવે છે .. 100મી લંબાઈનો કેબલ છે.

$\angle ABC, = 60^{\circ}$

ધારોકે બલૂનની ઊંચાઈ , $\angle ABC,$

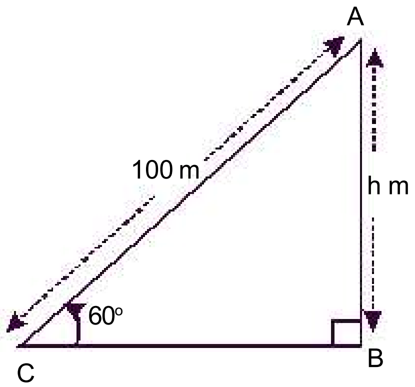
$$\frac{AB}{AC} = \sin 60^{\circ}$$

$$\frac{h}{100} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$h = 50\sqrt{3}$$

$$= 50 \times 1.732$$

$$= 86.6$$



આકૃતિ. 23.11

તેથી બલૂનની ઊંચાઈ 86.6 મીટર હશે.

ઉદાહરણ 23.20: વાવાઝોડામાં એક ઉંચુ ઝાડ વચ્ચેથી ભાંગીને નીચે નમી ગયું ઝાડની ટોચ જ્યાં જમીનને અડે છે ત્યાં તે 30 નો ખૂણો બનાવે છે. અને આ જમીન પર આવેલી ટોચ અને ઝાડના થડ વચ્ચેનું અંતર 10 મીટર છે. ઝાડની ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : AB ઝાડ છે જે C આગળથી ભાંગી જાય છે અને ઝાડની ટોચ A જમીનને B આગળ સ્પર્શે છે. $\angle CDB = 30^{0}$ અને

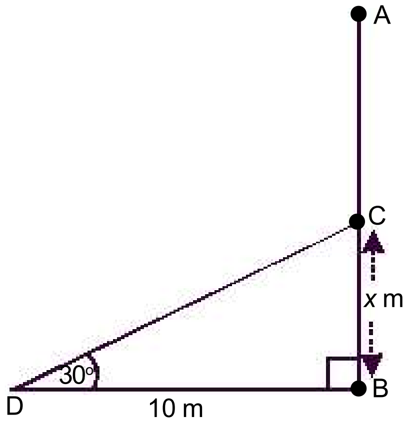
BD =10 મી

$$\frac{BC}{BD} = \tan 30^\circ$$

$$\frac{x}{10} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{10}{\sqrt{3}} \text{ મી} \qquad ...(i)$$

હવે કાટકોણ ΔCBD માં



આકૃતિ. 23.12

$$\frac{BC}{DC} = \sin 30^\circ$$

$$\frac{x}{DC} = \frac{1}{2}$$

$$DC = 2x$$

$$= \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ m} \qquad ...[\text{By (i)}]$$

$$AC = DC = \frac{20}{\sqrt{3}} \qquad ...(ii)$$

$$= BC + AC$$

$$= \left(\frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{30}{\sqrt{3}} \text{ or } 10\sqrt{3} \text{ m}$$

$$= 17.32 \text{ મી}$$

ઝાડની ઊંચાઈ મા 17.32 મીટર હશે.

ઉદાહરણ 23.21: જ્યારે સૂર્યનો ઉત્સેધકોણ 45° હોય છે, ત્યારે એક ટાવરનો પડછાયો , સૂર્યનો ઉત્સેધકોણ 60° હોય ત્યારે મળતા પડછાયા કરતાં 10 મી વધુ લાંબો જોવા મળે છે. ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારોકે ટાવર AB ની ઊંચાઈ 4 મીટર છે. C અને D બિંદુંઓ એવાં છે કે જ્યાંથી અનુક્રમે સૂર્યનો ઉત્સેધ 45° અને 60° જોવા મળે છે.

CD = 10 મી, $\angle ACB = 45^\circ$ અને $\angle ADB = 60^\circ$

ધારોકે BD = x મી છે.

BC = BD + CD = (x + 10) m

હવે કાટકોણ $\angle$d DABC,

$$\frac{AB}{BC} = \tan 45^\circ$$

$$\frac{h}{x+10} = 1$$

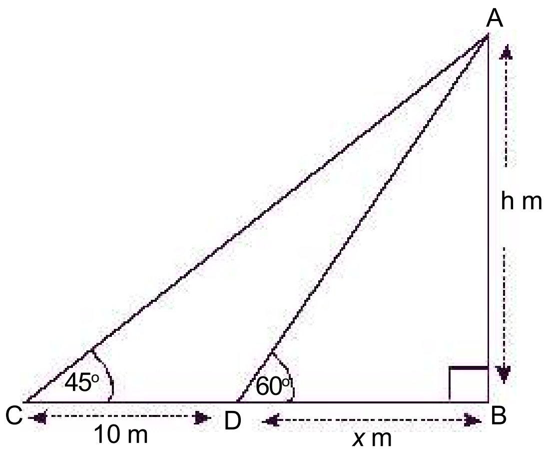
$$x = (h - 10) \text{ m} \qquad \text{...(i)}$$

$\angle$DABD,

$$\frac{AB}{BD} = \tan 60^\circ$$

$$\frac{h}{x} = \sqrt{3}$$

$$h = \sqrt{3}\,x \qquad \text{...(ii)}$$



આકૃતિ. 23.13

પરિણામ (i) અને (ii), પરથી

$$h = \sqrt{3}\,(h - 10)$$

$$h = \sqrt{3}\,h - 10\sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3} - 1)h = 10\sqrt{3}$$

$$h = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

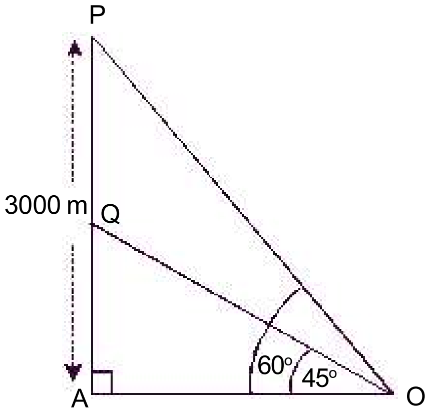
$$= \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \times \frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)} = \frac{10\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$= 5\sqrt{3}\,(\sqrt{3} + 1) = 15 + 5 \times 1.732 = 15 + 8.66 = 23.66$$

ટાવરની ઊંચાઈ 23.66 મી.

ઉદાહરણ 23.22: *એક વિમાન 3000 મીટરની ઉંચાઈએ ઉડી રહ્યું છે તેની નીચે એક બીજું વિમાન પણ ઉડી રહ્યું છે. બંને એક જ લંબ રેખામાં આવે છે ત્યારે જમીન પરના એક બિંદુએથી તેમના ઉત્સેધકોણ અનુક્રમે 60^o અને 45^o માલુમ પડે છે. બંને વિમાન વચ્ચેનું અંતર શોધો.*

ઉદાહરણ : *ધારોકે અવલોકન બિંદુ 0 છે. અને P તથાQ એ બે વિમાન છે.*



આકૃતિ. 23.14

પક્ષ $AP = 3000$ *મી અને* $\angle AOQ = 45^o$

અને $\angle AOP = 60^o$

$\angle d\ \angle QAO,$

$$\frac{AQ}{AO} = \tan 45^\circ = 1$$

$$AQ = AO \qquad ...(i)$$

$\angle d\ DPAO,$

$$\frac{PA}{AO} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\frac{3000}{AO} = \sqrt{3} \text{ or } AO = \frac{3000}{\sqrt{3}} \qquad ...(ii)$$

પરિણામ (i) *અને* (ii), *પરથી*

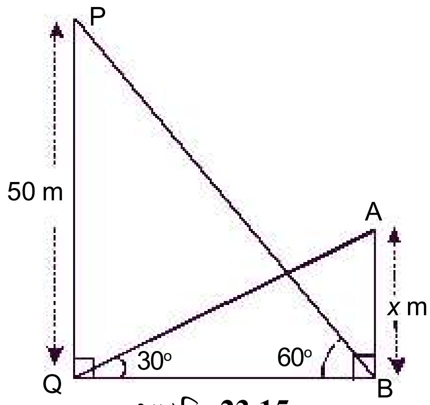
$$AQ = \frac{3000}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1000\sqrt{3} = 1732 \text{ મી}$$

$$PQ = AP - AQ = (3000 - 1732) \text{ m} = 1268 \text{ મી}$$

બંને વિમાન વચ્ચેનું ઉભું અંતર 1268 *મીટર*

ઉદાહરણ 23.23: *એક ટાવરના તળિયેથી સામેના મકાનની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 30^o જણાય છે અને આ મકાનના તળિયેથી પેલા ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60^o જણાય છે. જો ટાવરની ઊંચાઈ 50મી હોય, તો મકાનની ઊંચાઈ શોધો.*

ઉકેલ : *ધારોકે PQ ટાવર છે અને AB મકાન છે.*



આકૃતિ. 23.15

50*મી* $\angle AQB = 30^o$ *અને* $\angle PBQ = 60^o$

$$\angle d\ \Delta ABQ, \frac{x}{BQ} = \tan 30^\circ \qquad ...(i)$$

કાટકોણ $\angle d\ \Delta PQB, \dfrac{PQ}{BQ} = \tan 60^\circ$ *માં* ...(ii)

પરિણામ (i) ને (ii), ભાગતાં

$$\frac{x}{50} = \frac{\tan 30^\circ}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{50}{3} = 16.67$$

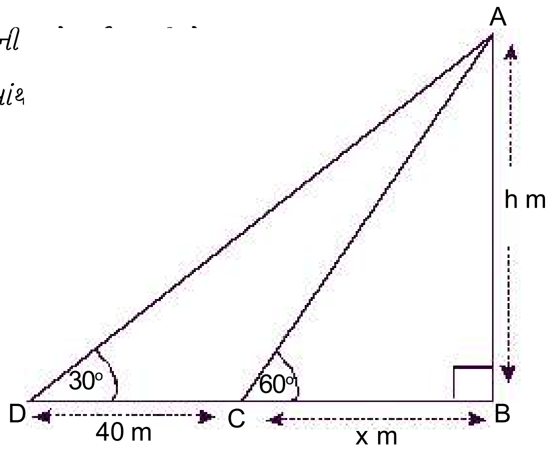
મકાનની ઊંચાઈ = 16.67 મી

ઉદાહરણ 23.24: નદીના એક કિનારે ઉભેલો માણસ બીજા કિનારે રહેલા ઝાડની ટોચને જુએ છે તો ઉત્સેધકોણ 60° જણાય છે આ માણસ કિનારાને કાટખૂણે નદીથી વિરુદ્ધ દિશામાં 40 મીટર ચાલીને ફરી ઝાડની ટોચ જુએ છે, ત્યારે ઉત્સેધરોણ 30°નો માલુમ પડે છે. ઝાડની ઊંચાઈ અને નદીની પહોળાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારોકે ઝાડની ઊંચાઈ 4મી છે અને નદીની

C અને D એ જોનાર માણસની બે સ્થિતિ છે જ્યાંથ

60° અને 30° છે.



આકૃતિ. 23.16

$$\frac{AB}{BC} = \tan 60^\circ$$

$$\frac{h}{x} = \sqrt{3}$$

$$h = \sqrt{3}\,x \qquad \text{...(i)}$$

હવે કાટકોણ ΔABD, માં

$$\frac{AB}{BD} = \tan 30^\circ$$

$$\frac{h}{x+40} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{...(ii)}$$

પરિણામ (i) અને (ii), પરથી

$$\frac{\sqrt{3}x}{x+40} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$3x = x + 40$$

$$2x = 40$$

$$x = 20$$

પરિણામ (i) પરથી

$$h = \sqrt{3} \times 20 = 20 \times 1.732$$

$$= 34.64$$

ઝાડની ઊંચાઈ 34.64 મી છે.

ઉદાહરણ **23.25:** 100મી ઊંચા ટાવરની ટોચ પર ઉભા રહી સ્વાતિ ટાવરની સામસામેની બાજુએ ઉભેલી બે મોટરકાર જુએ છે જો તેમનાં અવસેધ બાજુએ ઉભેલી બે મોટરકાર જુએ છે જો તેમનાં અવસેધ (અવનતકોણ) અનુક્રમે 60^o અને 45^o હોય તો બે મોટરકાર વચ્ચેનું અંતર શોધો.

ઉકેલ : ધારોકે ટાવર PM = 100 મીટર છે A અને B બે મોટરકાર છે.

A નો અવસેધકોણ $\angle RPB = 60^o$ અને $\angle RPB = 45^o$ નો અવસેધ કોણ

$$\angle QPA = 60^o = \angle PAB$$

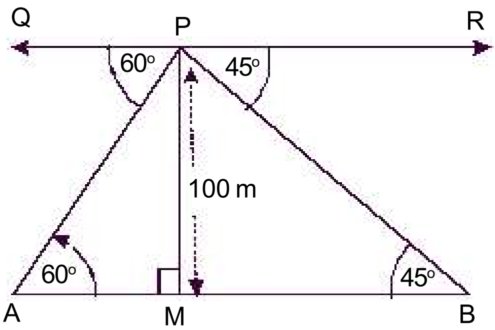
$$\angle RPB = 45^o = \angle PBA$$

ΔPMB,

$$\frac{PM}{MB} = \tan 45^o$$

$$\frac{100}{MB} = 1$$

MB = 100 મીટર ...(i)



આકૃતિ. **23.17**

હવે કાટકોણ ΔPMA,

$$\frac{PM}{MA} = \tan 60^o$$

$$\frac{100}{MA} = \sqrt{3}$$

$$MA = \frac{100}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{100\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{100 \times 1.732}{3}$$

$$= 57.74$$

MA = 57.74 મીટર ...(ii)

$= MA + MB$

$= (57.74 + 100)$ મીટર [(i) અને (ii)]

$= 157.74$ મીટર

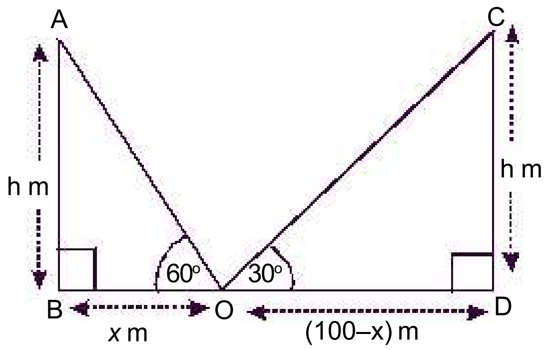
ઉદાહરણ 23.26: *સમાન ઉંચાઈના બે સ્તંભો 100મી પહોળા રસ્તાની બંન્ને બાજુએ ઉભા કરેલા છે. સ્તંભ વચ્ચેના રસ્તાના કોઈ બિંદુંએ સ્તંભના ટોચના ઉત્સેધકોણ 60° અને 30° છે. સ્તંભોની ઊંચાઈ શોધો અને બિંદુંનું સ્થાન જાણવો.*

ઉકેલ : ધારોક AB અને CD 4 મીટર ઊંચાઈના સ્તંભો છે. રસ્તા ઉપરનું બિંદુ 0 છે ધારોકે BO = x મી

$OD = (100 - x)$ m

$\angle AOB = 60o$ and $\angle COD = 30o$

ΔABO,



આકૃતિ. 23.18

$$\frac{h}{x} = \sqrt{3}$$

$$h = \sqrt{3}\ x \qquad ...(i)$$

ΔCDO,

$$\frac{CD}{OD} = \tan 30^\circ$$

$$\frac{h}{100 - x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad ...(ii)$$

પરિણામ (i) અને (ii), પરથી

$$\frac{\sqrt{3}x}{100 - x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$3x = 100 - x$$

$$4x = 100$$

$$x = 25$$

પરિણામ (i) અને (x), કિંમત મૂકતાં

$$h = \sqrt{3} \times 25 =$$

$1.732 \times 25\ \ 43.3$

સ્તંભોની ઊંચાઈ 43.3 મીટર

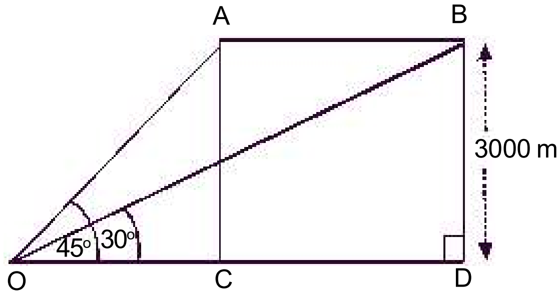
ઉદાહરણ23.27: જમીન પરના એક બિંદુંએથી આકાશમાં ઉડતા બલુનનો ઉત્સેધકોણ 45^0 માલુમ પરડે છે. 15 સેકન્ડ પછી બલૂનનો ઉત્સેધકોણ 30^0 માલુમ પડે છે જો બલૂન જમીનથી 3000 મીટર ઊંચાઈ જાળવીને ઉડતું હોય તો બલુનની ઝડપ શોધો.

ઉકેલ : ધારોકે 0 અવલોકન બિંદુ છે બલૂનની પહેલી સ્થિતિ A અને 15 સેકન્ડ પછીની સ્થિતિ B છે.

ધારોકે $\angle AOC = 45^o$ અને $\angle BOD = 30^o$

By question, AC = BD = 3000 મીટર

હવે કાટકોણ $\angle BDO$, માં



આકૃતિ. 23.19

$$\frac{AC}{OC} = \tan 45^o$$

$$\frac{3000}{OC} = 1$$

$$OC = 3000 \text{ મીટર} \qquad ...(i)$$

$\angle$ BDBDO,

$$\frac{BD}{OD} = \tan 30^o$$

$$\frac{3000}{OC+CD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$3000\sqrt{3} = 3000 + CD \qquad ...[\text{By (i)}]$$

$$CD = 3000(\sqrt{3} - 1)$$

$$= 3000 \times 0.732$$

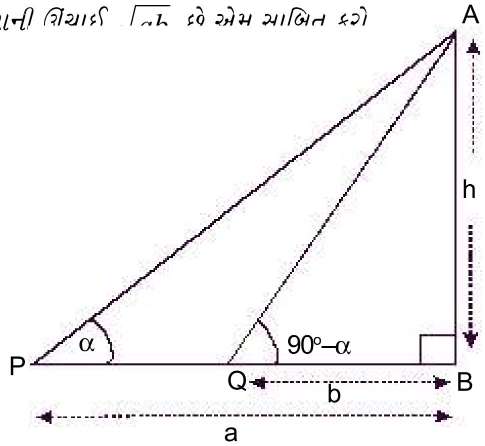
$$= 2196$$

$$= AB = CD = 2196 \text{ મીટર}$$

$$= \left(\frac{2196}{15} \times \frac{60 \times 60}{1000}\right) \text{ કિલોમીટર}$$

$$= 527.04 \text{ કિમીકલાક}$$

ઉદાહરણ 23.28: *એક મિનારીના તળિયામાંથી પસાર થતી રેખા ઉપર P અને Q બિંદુઓ મિનારીની એક જ બાજુએ આવેલા છે P અને Q થી મળતા મિનારાની ટોચના ઉત્સેધકોણના માપ પરસ્પર કોટિકોણ છે P અને Q નું મિનારાથી અંતર અનુક્રમે a અને b હોય તો મિનારાની ઊંચાઈ $\sqrt{ab}$ છે એમ સાબિત કરો*



આકૃતિ. 23.20

ઉકેલ : ધારોકે ઊંચાઈ ધરાવતો મિનારો AB છે.

ĐAPB = a અને ĐAQB = 90° – a

જો PB = a તો QB = b.

હવે કાટકોણ $\frac{AB}{QB} = \tan(90° - \alpha)$

or $\frac{h}{b} = \cot\alpha$ ...(i)

કાટકોણ ∠d DABP,

$$\frac{AB}{PB} = \tan\alpha$$

or $\frac{h}{a} = \tan\alpha$ ...(ii)

પરિણામ (i) અને (ii), પરથી

$$\frac{h}{b} \times \frac{h}{a} = \cot\alpha \,.\, \tan\alpha = 1$$

$$h^2 = ab$$

$$h = \sqrt{ab}$$

મિનારાની ઊંચાઈ $= \sqrt{ab}$.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 23.2

1. દીવાલનને લંબ છે. દિવાલ સાથે ત્રાંસી ગોઠવેલી સીડી જમીન સાથે 60^0નો ખૂણો બનાવે છે. સીડીનો જમીન પરનો છેડો દીવાલથી 3 મી દૂર હોય તો, સીડીની લંબાઈ શોધો.
2. મિનારાની તળિયેથી 50 મી દૂરના બિંદુએ મિનારાની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60^0 માલુમ પડે છે મિનારાની ઊંચાઈ શોધો.
3. જમીન પરના એખ બિંદુએથી જોતાં મિનારીની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 30^0 જણાવે છે જો આ બિંદુ મિનારાના તળીયાથી 150 મીટર દૂર હોય, તો મિનારાની ઊંચાઈ શોધો.

4. એક પતંગની 100 મીટર લાંબી દોરી જમીન સાથે 60^0નો ખૂણો બનાવે છે પતંગની ઊંચાઈ શોધો. પતંગની દોરીમાં ઢીલ નથી તેમ માની લો.

5. એક પતંગ જમીનથી 100 મીટરની ઊંચાઈએ ઉડી રહ્યો છે જો પતંગની દોરી જમીન સાથે 60^0નો ખૂણો બનાવતી હોય તો દોરીની લંબાઈ શોધો. પતંગની દોરીમાં ઢીલ નથી એમ માપી લો.

6. $10\sqrt{3}$ મી ઊંચા મિનારાની તળિયેથી 100 મી આવેલા બિંદુએથી જોતાં મિનારીની ટોચનો ઉત્સેધકોણ કેટલો મળે ?

7. 12મી ઊંચાઈનું ઝાડ પવનના તોફાનમાં વચ્ચેના કોઈ ભાગથી ભાંગી જાય છે આ ભાગ ઝાડથી છુટો પડતો નથી પણ ઝાડની ટોચ નમીને જમીન સાથે 60^0નો ખૂણો બનાવે છે જમીનથી કેટલી ઊંચાઈએથી ઝાડ ભાંગી ગયું હશે .

8. એક ઝાડનું થડ પવનના તોફાનમાં તૂટી જાય છે. ઝાડની ટોચ થડથી 10મી દૂર જમીનને અડકે છે અને ત્યાં જમીન સાથે 45^0નો ખૂણો બનાવે છે. ઝાડની ઊંચાઈ શોધો.

9. જમીનપરના એક બિંદુએથી મિનારાની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 45^0માલુમ પડે છે. આ બિદુંએથી મિનારા તરફ 40મી ચાલ્યા પછી મિનારાની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60^0માલુમ પડે છે. મિનારાની ઊંચાઈ શોધો.

10. 80મી ઊંચી ટેકરીની સામસામેની બાજુએ બે માણસો ભભા છે. તેઓ ટેકરીની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 30^0અને 60^0માપે છે. આ બે માણસો વચ્ચેનું અંતર શોધો.

11. 60^0મી ઉંચા મકાન પરથી એક મિનારાની ટોચનો અને તળિયાનો અવસેધ કોણ અનુક્રમે 45^0 અને 60^0 માલુમ પડે છે મિનારાની ઊંચાઈ શોધો,અને મકાન પરથી મિનારાનું અંતર પણ શોધો.

12. એક મકાનની બારીથી ટેકવેલી 4મી લાંબી સીડી જમીન સાથે 30^0નો ખૂણો બનાવે છે. સીડીનો જમીન પરનો છોડો સ્થિર રાખીને ઉલટી દિશામાં સામેના મકાન સાથે ગોઠવતાં સીડી જમીન સાથે 60^0નો ખૂણો બનાવે છે. આવે તો મકાન વચ્ચેનું અંતર શોધો.

13. એક બહુમાળી ઈમારતથી 15 મીટર દૂર જમીન પરના એક બિંદુઓ જોતાં પહેલા માળની છતનો ઉત્સેધકોણ 300^0 અને બીજા માળની છતનો ઉત્સેધકોણ 45^0 માલુમ પડે છે. બીજા માળની ઊંચાઈ શોધો.

14. જમીનથી 1 કિલોમીટરની ઊંચાઈએ ઉડતા એક વિમાનનો ઉત્સેધકોણ એક સ્થળેથી 60^0મપાય છે. 10 સેકન્ડ પછી તેજ સ્થેથી વિમાનનો ઉત્સેધકોણ 30^0 મપાય છે. જો વિમાન એખ સરખી ઊંચાઈએ ઉડતું હોય, તો વિમાનની ઝડપ શોધો.

15. એક મિનરાના તળિયેથી સામાને મકાનની ટોચનો ઉત્સેધ 30^0 માલુમ પડે છે અને મકાનના તળિયેથી મિનારાની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60^0 માલૂમ પડે છે જો મિનારાની ઊંચાઈ 50મી હોય તો મકાનની ઊંચાઈ શોધો.

સારાંશ

ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરોની કિંમત દર્શાવતો કોઠો.

ત્રિ ગુણોત્તર

Q / ત્રિ ગુણોત્તર	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
SIN Q	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
COS Q	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
TAN Q	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	અવ્યાખ્યાયિત
COT Q	અવ્યાખ્યાયિત	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
COSEC Q	અવ્યાખ્યાયિત	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
SEC Q	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	અવ્યાખ્યાયિત

સહાયક વેબસાઈટ

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld:wolfram.com

સ્વાંત સ્વાધ્યાય

1. *નીચેની પ્રત્યેકની કિંમત શોધો*

   (i) $4\cos^2 60^o + 4\sin^2 45^o - \sin^2 30^o$

   (ii) $\sin^2 45^o - \tan^2 45^o + 3(\sin^2 90^o + \tan^2 30^o)$

(iii) $\dfrac{5\sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ - 4\tan^2 30^\circ}{2\sin^2 30^\circ \cos^2 30^\circ + \tan 45^\circ}$

(iv) $\dfrac{\cot 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$

2. *નીચેના પ્રત્યેક સાબિત કરો :*

(i) $2\cot^2 30^\circ - 2\cos^2 60^\circ - \dfrac{3}{4}\sin^2 45^\circ - 4\sec^2 30^\circ = -\dfrac{5}{24}$

(ii) $2\sin^2 30^\circ + 2\tan^2 60^\circ - 5\cos^2 45^\circ = 4$

(iii) $\cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

(iv) $\dfrac{\cot 30^\circ \cot 60^\circ - 1}{\cot 30^\circ + \cot 60^\circ} = \cot 90^\circ$

3. *જો* $Q = 30^\circ$, *તો ચકાસો*

(i) $\sin 2q = 2\sin q \cos q$

(ii) $\cos 2q = 1 - 2\sin^2 q$

(iii) $\tan 2q = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

4. *જો* $A = 60^\circ$ *અને* $B = 30^\circ$, *તો ચકાસો*

(i) sin (A + B) ¹ sin A + sin B

(ii) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A \sin B$

(iii) $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

(iv) $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

(v) $\tan A = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A}$

5. $(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$, *સૂત્ર વાપરીને* $\cos 15^\circ$ *ની કિંમત મેળવો,*

6. $\sin(A+B) = 1$ *અને* $\cos(A-B) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $0^\circ < A + B$ £ 90°, $A > B$, A *અને* B.

7. *એક માણસ એક ઊંચા મકાનથી 40મી દૂર ભભો છે. ત્યાંથી મકાન ઉપર રાખેલા ધ્વજદંડની ટોચનો અને ધ્વજવંદન ના તળિયાનો અઉત્સેધ કોણ અનુક્રમે* 60^0 *અને* 45^0 *જુએ છે મકાનની ઉંચાઈ અને ધ્વજ દંડની લંબાઈ શોધો.*

8. એક ટેકરીની ટોચ પરથી જોતાં રસ્તા પરના કિલોમીટર દર્શક બે પથ્થરોના અવસેધકોણ અનુક્રમે 30^0 અને 60^0 જણાય છે. ટેકરીની ઉંચાઈ શોધો.

9. 7 મીટર ઉંચા મકાન પરથી જોતાં એક કેબલ ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60^0 અને તેના તળિયાનો અવસેધકોણ 45^0 માલૂમ પડે છે. કેબલ ટાવરની ઉંચાઈ શોધો.

10. દરિયા કિનારે આવેલા એક ટાવર પર ઉભેલો માણસ એક વણને તેની તરફ આવતું જુએ છે, જે 10 મિનિટ પછી 60^0 થાય છે. આ વહાણ કિનારે ક્યારે પહોચશે (વહાણને કિનારે પહોંચશે.

11. દીવાદાંડીની સામસામની બાજુએથી દીવાદાંડી તરફ આવતા બે વહાણમાંથી દીવાદાંડીની ટોચનો ઉત્સેધકોણ અનુક્રમે 30^0 અને 45^0 માલૂમ પડે છે . જો બે વહાણ વચ્ચેનું અંતર 100 મીટર હોય, તો દીવાદાંડીની ઉંચાઈ

12. જ્યારે સૂર્યનો ઉત્સેધકોણ 30^0 હોય ત્યારે એક ટાવરનો મળતો પડછાયો , સૂર્યનો ઉત્સેધકોણ 60^0 હોય ત્યારે મળતા પડછાય કરતાં $45\sqrt{3}$ મી લાંબો હોય છે. ટાવરની ઉંચાઈ શોધો.

13. બે મિનારા વચ્ચેનું અંતર 80મીટર છે. બીજા મિનારાની ટોચ પર થી જોતાં પહેલ મિનારાની ટોચનો અવસેધ કોણ 30^0 માલૂમ પડે છે જો બીજા મિનારાની ઉંચાઈ 160મી હોય, તો પહેલા મિનારાની ઉંચાઈ શોધો.

14. એક શેરીમાં બે મકાન સામ સામે આવેલા છે. એખમાકનની 10મી ઉંચે આવેલી બારીમાંથી જોતાં બીજા મકાનની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60^0 અને તળિયાનો અવસેધકોણ 45^0 માલૂમ પડે છે. બીજા મકાનની ઉંચાઈ શોધો. ($\sqrt{3}$ =1.73)

15. એક ઓટલા ઉપર 1.6મીટર ઉંચાઈનું એખ પૂતળું મુકેલું છે. જમીન પરના એક બિંદુએથી જોતાં પુતળાની ટોચનો અને ઓઠલાની ટોચનો ઉત્સેધકોણ આનુક્રને 60^0 અને 45^0 માલૂમ પડે છે. ઓટલાની ઉંચાઈ શોધો.

તમારી પ્રગતિ ચકાસોના જવાબો

23.1

1. (i) $\frac{5}{4}$ (ii) $\frac{5}{2}$ (iii) 0 (iv) 2 (v) 0 (vi) $\frac{67}{12}$

5. $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

6. $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

7. $A = 45^\circ$ અને $B = 15^\circ$

8. $A = 30^\circ$ અને $B = 15^\circ$

9. $QR = 5\sqrt{3}$ અને $PR = 10$ સેમી

10. $\angle A = 60^\circ$ અને $\angle C = 30^\circ$

11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. $x = 10^\circ$

13. C

14. B

15. A

23.2

1. 6 મીટર	2. 86.6 મીટર	3. 86.6 મીટર
4. 86.6 મીટર	5. 115.46 મીટર	6. 60°
7. 5.57 મીટર	8. 24.14 મીટર	9. 94.64 મીટર
10. 184.75 મીટર	11. 25.35 મીટર	12. 5.46 મીટર
13. 6.34 મીટર	14. 415.66 કી/મી	15. 16.67 મીટર

સત્રાંત સ્વાધ્યાય જવાબ

1. (I)

$\frac{11}{4}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{40}{121}$

$\frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}$

5. $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	6. $A = 60^\circ$ અને $B = 30^\circ$	7. 40m , 29.28 મીટર
8. 433 મીટર	9. 19.124 મીટર	10. 5 મિનીટ
11. 36.6 મીટર	12. 67.5 મીટર	13. 113.8 મીટર
14. 27.3 મીટર	15. 2.18656 મીટર	