4

વિશિષ્ટ ગુણનફળ અને અવયવીકરણ

અગાઉના પાઠમાં બૈનિક પદાવલીઓ ખાસ કરીને બહુપદીઓના ગુણાકાર વિશે તમે શીખી ગયા છો. બીજગણિતના અભ્યાસમાં વારંવાર ઉદ્‌ભવતા ચોક્કસ ગુણાકારો આપણને જોવા મળે છે. જો આપણે તેમના વિશે વધારે (ઉંડાણ પૂર્વકનું) જ્ઞાન મેળવીએ તો એ ગુણાકારોમાં આપણે પુષ્કળ સમય અને મહેનત બચાવી શકીએ અને વાસ્તવમાં બધાં સોપાનો લખ્યા સિવાય આપણે ગુણાકારની પ્રક્રિયા કરી શકીએ. દા.ત.

જો તમે $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)(a - b)$, $(a - b)^3$ *વગેરેના ગુણાકાર જાણતા હોય તો અનુક્રમે* 108×108, 97×97, 104×96, $99 \times 99 \times 99$, *ના જેવા ગુણાકાર સરળતાથી કરી શકો (સરળતાથી કરી શકાય) આવા ગુણાકાર (ગુણાનકૂપને વિશિષ્ટ ગુણનફળ (ગુણાકાર) કહેવામાં આવે છે.*

અવયવી કરણ એ a^2-b^2, a^3+8b^3, *ના જેવા ચોક્કસ ગુણાકારોના અવયવો પાડવાની ક્રિયા છે. આપણે એવી બહુપદીઓ કે જેના સહગુણકો પૂર્ણાંકો હોય તેવીજ બહુપદીના અવયવો પાડવાનું શીખીશું.*

આ પાઠમાં તમે કેટલાંક વિશિષ્ટ (ગુણાકારો) ગુણમફળ અને કેટલીક બહુપદીઓના અવયવીકરણ વિશે શીખશો. તદ્‌ઉપરાંત અવયવીકરણથી બહુપદીઓના ગુ.સા.અ અને લ.સા.અ. શોધતાં અને અંતમાં તમને સંમેય બૈજિક પદાવલી અને સંમયે બૈજિક પદાવલી પરની મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ અભિવ્યક્ત કરવાનું તમ શીખવીશું.

હેતુઓ :

આ પાઠનો અભ્યાસ કર્યા પછી તમે.

- *વિશિષ્ટ ગુણાકારો* (a+b)2, (a+b) (a-b), (x+a) (x+b) (a+b) (a2+ab+b2), (a-b) (a2+ab+b2), (a+b)3 *અને .... માટેના સૂત્રો લખી શકશો.*
- *સૂત્રોનો ઉપયોગ કરીને સંખ્યાના વર્ગ અને ઘન ગણી શકશો.*
- a^2-b^2, a^3+b^3 *સ્વરૂપની અભિવ્યક્તિનો સમાવેશ થતો હોય તેવી આપેલી બહુપદીના અવયવો પાડી શકશો.*

- મધ્યમપદના વિભાજન દ્વારા ax2+bx+c(a # 0) સ્વરૂપનો બહુપદીઓના અવયવો પાડી શકશો.
- અવયવીકરણની મદદથી ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ નક્કી કરી શકશો.
- એક કે બે ચલમાં સંમેય પદાવલીઓનાં ઉદાહરણ આપી શકશો.
- સંમેય પદાવલીઓ પર ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ કરી શકશો.

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

- સંખ્યા સંહતિ અને ચારમૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ
- ધાતાંકના નિયમો
- બહુપદી પરના ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ
- સંખ્યાઓના ગુ.સા.અ અને લ.સા.અ.
- પ્રાથમિક અને ઉચ્ચ પ્રાથમિક કક્ષાએ શીખેવેલી ભૂમિતિ અને માપનનું જ્ઞાન

4.1 વિશિષ્ટ ગુણનરૂમ (ગુણાકાર)

બીજ ગણિતમાં જે વારંવાર અભિવ્યક્ત થાય છે તેવા વિશિષ્ટ ગુણાકાર વિશે શીખીએ.

(1) $(a + b)^2$ શોધીએ.

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

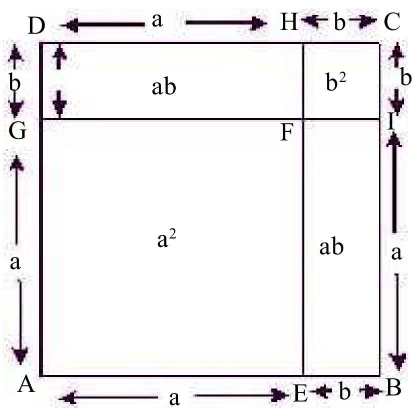
$= a(a + b) + b(a + b)$ (વિભાજનનો નિયમ)

$= a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

ભૌતિક ચકાસણી

જમીબાજુ દર્શાવેલી આકૃતિ તરફ ધ્યાન કેન્દ્રિત કરો.



(i) $(a + b)^2$ = ABCD ચોરસનું ક્ષેત્રફળ

= AEFG ચોરસનું ક્ષેત્રફળ +

EBIF લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ +

DGFH લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ +

CHFI ચોરસનું ક્ષેત્રફળ

$= a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

આમ **$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$**

(2) $(a – b)^2$ શોધીએ.

$(a – b)^2 = (a – b)(a – b)$ [વિભાજનનો નિયમ]

$= a(a – b) – b(a – b)$

$= a^2 – ab – ab + b^2$

$= a^2 – 2ab + b^2$

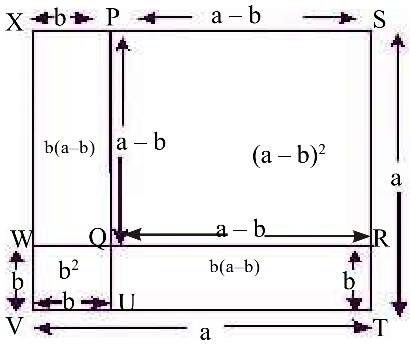
બીજી પદ્ધતિ (બીજી રીત) : $(a+b)^2$ *નો ઉપયોગ કરીને*

આપણે જાણીએ છીએ કે. a-b= a+c-b

$(a – b)^2 = [a + (–b)]^2$

$= a^2 + 2(a)(–b) + (–b)^2$

$= a^2 – 2ab + b^2$



ભૌતિક ચકાસણી :

નોંધ : PQRS *ક્ષેત્રફળને* PQRS *તરીકે દર્શાવાય*

$(a – b)^2 = PQRS$

$= STVX - [RTVW+PUVX-QUVX]$

$= a^2 – (ab + ab – b^2)$

$= a^2 – ab – ab + b^2$

$= a^2 – 2ab + b^2$

આમ **$(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$**

તારવણી

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .....(1)

$(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$ .....(2)

પરિણામ (1) અને (૨) નો સરવાળો કરતાં.

$(a + b)^2 + (a – b)^2 = 2(a^2 + b^2) = 2a^2 + 2b^2$

પરિણામ (1) અને (૨) ની બાદબાકી કરતાં.

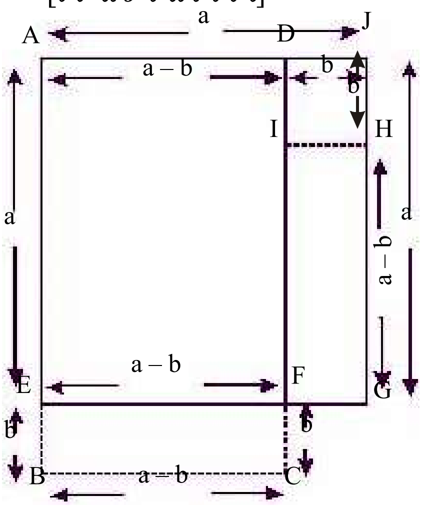
$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

(3) $(a + b)(a - b)$ નું ગુણનફળ મેળવીએ

$(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b)$ [વિભાજનનો નિયમ]

$= a^2 - ab + ab - b^2$

$= a^2 - b^2$



ભૌમિતિક ચકાસણી :

જમણીબાજુ આપેલી આકૃતિનું નિરીક્ષણ કરો.

$(a + b)(a - b)$ = ABCD

= AEFD + EBCF

= AEFD + FGHI

= [AEFD + FGHI + DIHJ] – DIHJ

= AEGJ – DIHJ

$= a^2 - b^2$

આમ. $\mathbf{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$

બે સંખ્યાનો સરવાળો અને તેમના તફાવતના ગુણાકારની પ્રક્રિયા અંકશાસ્ત્રમાં (અંક ગણિત) માં ખૂબ ઉપયોગી છે.

દાખલા તરીકે $64 \times 56 = (60 + 4) \times (60 - 4)$

$= 60^2 - 4^2$

$= 3600 - 16$

$= 3584$

(4) હવે આપણે $(x + a)(x + b)$ નું ગુણાનફળ મેળવીએ.

$(x + a)(x + b) = x(x + b) + a(x + b)$ [વિભાજનનો નિયમ]

$= x^2 + bx + ax + ab$

$= x^2 + (a + b)x + ab$

આમ $\mathbf{(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab}$

તારણી (i) $(x-a)(x-b) = x^2-(a+b)x+ab$

(ii) $(x-a)(x+b) = x^2+(b-a)x-ab$

આ પરિણામોની ચકાસણી કરવાની મને સલાહ આપવામાં આવે છે.

(5) હવે આપણે $(ax+b)(cx+d)$ નું ગુણમફળ મેળવીએ.

$$(ax+b)(cx+d) = ax(cx+d)+b(cx+d)$$
$$= acx^2+adx+bcx+bd$$
$$= acx^2+(ad+bc)x+bd$$

$$\mathbf{(ax+b)(cx+d) = acx^2+(ad+bc)x+bd}$$

તારવણી (i) $\mathbf{(ax-b)(cx-d) = acx^2-(ad+bc)x+bd}$

(ii) $\mathbf{(ax-b)(cx+d) = acx^2-(bc-ad)x-bd}$

તમને આ પરિણામ ચકાસવાની સલાહ આપવામાં આવે છે.

ઉપર દર્શાવેલાં વિશિષ્ટ ગુણનફળો પર આધારિત કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 4.1: નીચેનું ગુણનફળ મેળવો.

(i) $(2a+3b)^2$ (ii) $\left(\frac{3}{2}a-6b\right)^2$

(iii) $(3x+y)(3x-y)$ (iv) $(x+9)(x+3)$

(v) $(a+15)(a-7)$ (vi) $(5x-8)(5x-6)$

(vii) $(7x-2a)(7x+3a)$ (viii) $(2x+5)(3x+4)$

ઉકેલ :

(i) અહીં આપણે (સૂત્ર પ્રમાણે જોતાં) a ની જગ્યાએ હવે અને b ની જગ્યાએ 3b છે.

$$(2a+3b)^2 = (2a)^2+2(2a)(3b)+(3b)^2$$
$$= 4a^2+12ab+9b^2$$

(ii) વિશિષ્ટ ગુણાનફળ (૨) નો ઉપયોગ કરીને

$$\left(\frac{3}{2}a-6b\right)^2 = \left(\frac{3}{2}a\right)^2-2\left(\frac{3}{2}a\right)(6b)+(6b)^2$$

$$= \frac{9}{4}a^2 - 18ab + 36b^2$$

(iii) $(3x + y)(3x - y) = (3x)^2 - y^2$ [વિશિષ્ટ ગુણનફળ 3 નો ઉપયોગ]

$= 9x^2 - y^2$

(iv) $(x + 9)(x + 3) = x^2 + (9 + 3)x + 9 \times 3$ [વિશિષ્ટ ગુણનફળ 4 નો ઉપયોગ કરીને]

$= x^2 + 12x + 27$

(v) $(a + 15)(a - 7) = a^2 + (15 - 7)a - 15 \times 7$

$= a^2 + 8a - 105$

(vi) $(5x - 8)(5x - 6) = (5x)^2 - (8 + 6)(5x) + 8 \times 6$

$= 25x^2 - 70x + 48$

(vii) $(7x - 2a)(7x + 3a) = (7x)^2 + (3a - 2a)(7x) - (3a)(2a)$

$= 49x^2 + 7ax - 6a^2$

(viii) $(2x + 5)(3x + 4) = (2 \times 3)x^2 + (2 \times 4 + 5 \times 3)x + 5 \times 4$

$= 6x^2 + 23x + 20$

વિશિષ્ટ ગુણનફળ કે જેને ઘણીવાર બૈજિક સૂત્રો કહેવામાં આવે છે. તેમની મદદથી સાંખિત ગુણતરી (સંખ્યાત્મક ગણતરી) વધારે સરળતાથી કરી શકાય છે.

આપણે નીચેનાં ઉદારણો જોઈએ

વિશિષ્ટ ગુણનફળનો ઉપયોગ કરીને નીચેના દરેકની ગણતરી કરો.

(i) 101×101 (ii) 98×98 (iii) 68×72

(iv) 107×103 (v) 56×48 (vi) 94×99

ઉકેલ (i) $101 \times 101 = 101^2 = (100 + 1)^2$

$= 100^2 + 2 \times 100 \times 1 + 1^2$

$= 10000 + 200 + 1$

$= 10201$

(ii) $98 \times 98 = 98^2 = (100 - 2)^2$

$= 100^2 - 2 \times 100 \times 2 + 2^2$

$= 10000 - 400 + 4$

$= 9604$

(iii) $68 \times 72 = (70 - 2) \times (70 + 2)$

$= 70^2 - 2^2$

$= 4900 - 4$

$= 4896$

(iv) $107 \times 103 = (100 + 7)(100 + 3)$

$= 100^2 + (7 + 3) \times 100 + 7 \times 3$

$= 10000 + 1000 + 21$

$= 11021$

(v) $56 \times 48 = (50 + 6)(50 - 2)$

$= 50^2 + (6 - 2) \times 50 - 6 \times 2$

$= 2500 + 200 - 12$

$= 2688$

(vi) $94 \times 99 = (100 - 6)(100 - 1)$

$= 100^2 - (6 + 1) \times 100 + 6 \times 1$

$= 10000 - 700 + 6$

$= 9306$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 4.1

1. *નીચેના દરેકનું ગુણનફળ મેળવો.*

(i) $(5x + y)^2$ (ii) $(x - 3)^2$ (iii) $(ab + cd)^2$

(iv) $(2x - 5y)^2$ (v) $\left(\frac{x}{3} + 1\right)^2$ (vi) $\left(\frac{z}{2} - \frac{1}{3}\right)^2$

(vii) $(a^2 + 5)(a^2 - 5)$ (viii) $(xy - 1)(xy + 1)$ (ix) $\left(x + \frac{4}{3}\right)\left(x + \frac{3}{4}\right)$

(x) $\left(\frac{2}{3}x^2 - 3\right)\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}\right)$ (xi) $(2x + 3y)(3x + 2y)$ (xii) $(7x + 5y)(3x - y)$

2. સાદુંરૂપ આપો.

(i) $(2x^2+5)^2-(2x^2-5)^2$ (ii) $(a^2+3)^2+(a^2-3)^2$

(iii) $(ax+by)^2+(ax-by)^2$ (iv) $(p^2+8q^2)^2-(p^2-8q^2)^2$

3. વિશિષ્ટ ગુણનફળનો ઉપયોગ કરી નીચેના દરેકની ગણતરી કરો.

(i) 102×102	(ii) 108×108	(iii) 69×69
(iv) 998×998	(v) 84×76	(vi) 157×143
(vii) 306×294	(viii) 508×492	(ix) 105×109
(x) 77×73	(xi) 94×95	(xii) 993×996

4.2 બીજાં કેટલાંક વિશિષ્ટ ગુણન ફળ

(6) દ્વિપદી $(a+b)$. ને જુઓ આપણે તેનો ઘન શોધીએ.

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$$
$$= (a+b)(a^2+2ab+b^2) \quad \text{[વિભાજનનો ગુણધર્મ]}$$
$$= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$$
$$= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$$
$$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$= a^3+3ab(a+b)+b^3$$

આમ $\mathbf{(a+b)^3=a^3+3ab(a+b)+b^3}$

(7) હવે આપણે $(a-b)$ નો ઘન શોધીએ.

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2$$
$$= (a-b)(a^2-2ab+b^2) \quad \text{[વિભાજનનો ગુણધર્મ]}$$
$$= a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2) \quad \text{[વિભાજનનો ગુણધર્મ]}$$
$$= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3$$
$$= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$= a^3-3ab(a-b)-b^3$$

આમ $\mathbf{(a-b)^3=a^3-3ab(a-b)-b^3}$

આજ પરિણામ તમે $(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$ માં b ના સ્થાને - b મૂકીને મેળવી શકો

(8) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2)$ [વિભાજનનો ગુણધર્મ]

$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$

$= a^3 + b^3$

આમ $\mathbf{(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3}$

(9) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2)$ [વિભાજનનો ગુણધર્મ]

$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$

$= a^3 - b^3$

આમ $\mathbf{(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3}$

ઉપર દર્શાવેલા વિશિષ્ટ ગુણનફળો આધારિત કેટલાક ઉદાહરણો જોઈએ

ઉદાહરણ **4.3:** નીચેના દરેકનું ગુણનફળ શોધો.

(i) $(7x + 9y)^3$ (ii) $(px - yz)^3$ (iii) $(x - 4y^2)^3$

(iv) $(2a^2 + 3b^2)^3$ (v) $\left(\frac{2}{3}a - \frac{5}{3}b\right)^3$ (vi) $\left(1 + \frac{4}{3}c\right)^3$

ઉકેલ (i) $(7x + 9y)^3 = (7x)^3 + 3(7x)(9y)(7x + 9y) + (9y)^3$

$= 343x^3 + 189xy(7x + 9y) + 729y^3$

$= 343x^3 + 1323x^2y + 1701xy^2 + 729y^3$

(ii) $(px - yz)^3 = (px)^3 - 3(px)(yz)(px - yz) - (yz)^3$

$= p^3x^3 - 3pxyz(px - yz) - y^3z^3$

$= p^3x^3 - 3p^2x^2yz + 3pxy^2z^2 - y^3z^3$

(iii) $(x - 4y^2)^3 = x^3 - 3x(4y^2)(x - 4y^2) - (4y^2)^3$

$= x^3 - 12xy^2(x - 4y^2) - 64y^6$

$= x^3 - 12x^2y^2 + 48xy^4 - 64y^6$

(iv) $(2a^2 + 3b^2)^3 = (2a^2)^3 + 3(2a^2)(3b^2)(2a^2 + 3b^2) + (3b^2)^3$

$= 8a^6 + 18a^2b^2(2a^2 + 3b^2) + 27b^6$

$= 8a^6 + 36a^4b^2 + 54a^2b^4 + 27b^6$

(v) $\left(\frac{2}{3}a - \frac{5}{3}b\right)^3 = \left(\frac{2}{3}a\right)^3 - 3\left(\frac{2}{3}a\right)\left(\frac{5}{3}b\right)\left(\frac{2}{3}a - \frac{5}{3}b\right) - \left(\frac{5}{3}b\right)^3$

$$= \frac{8}{27}a^3 - \frac{10}{3}ab\left(\frac{2}{3}a - \frac{5}{3}b\right) - \frac{125}{27}b^3$$

$$= \frac{8}{27}a^3 - \frac{20}{9}a^2b + \frac{50}{9}ab^2 - \frac{125}{27}b^3$$

(vi) $$\left(1+\frac{4}{3}c\right)^3 = (1)^3 + 3(1)\left(\frac{4}{3}c\right)\left(1+\frac{4}{3}c\right) + \left(\frac{4}{3}c\right)^3$$

$$= 1 + 4c\left(1+\frac{4}{3}c\right) + \frac{64}{27}c^3$$

$$= 1 + 4c + \frac{16}{3}c^2 + \frac{64}{27}c^3$$

ઉદાહરણ 4.4: *વિશિષ્ટ ગુણનફળનો ઉપયોગ કરીને નીચેના દરેકનો ઘન શોધો.*

(i) 19 (ii) 101 (iii) 54 (iv) 47

ઉકેલ

(i) $19^3 = (20 - 1)^3$

$= 20^3 - 3 \times 20 \times 1\ (20 - 1) - 1^3$

$= 8000 - 60\ (20 - 1) - 1$

$= 8000 - 1200 + 60 - 1$

$= 6859$

(ii) $101^3 = (100 + 1)^3$

$= 100^3 + 3 \times 100 \times 1\ (100 + 1) + 1^3$

$= 1000000 + 300 \times 100 + 300 + 1$

$= 1030301$

(iii) $54^3 = (50 + 4)^3$

$= 50^3 + 3 \times 50 \times 4\ (50 + 4) + 4^3$

$= 125000 + 600\ (50 + 4) + 64$

$= 125000 + 30000 + 2400 + 64$

$= 157464$

(iv) $47^3 = (50 - 3)^3$

$= 50^3 - 3 \times 50 \times 3\ (50 - 3) - 3^3$

$= 125000 - 450\ (50 - 3) - 27$

$= 125000 - 22500 + 1350 - 27$

$= 103823$

ઉદાહરણ 4.5: *વાસ્તવિક ગુણાકાર કર્યા સિવાય નીચેના દરેકનું ગુણનફળ શોધો.*

(i) $(2a + 3b)\ (4a^2 - 6ab + 9b^2)$

(ii) $(3a - 2b)\ (9a^2 + 6ab + 4b^2)$

ઉકેલ (i) $(2a + 3b)\ (4a^2 - 6ab + 9b^2) = (2a + 3b)\ [(2a)^2 - (2a)\ (3b) + (3b)^2]$

$= (2a)^3 + (3b)^3$

$= 8a^3 + 27b^3$

(ii) $(3a - 2b)\ (9a^2 + 6ab + 4b^2) = (3a - 2b)\ [(3a)^2 + (3a)\ (2b) + (2b)^2]$

$= (3a)^3 - (2b)^3$

$= 27a^3 - 8b^3$

ઉદાહરણ **4.6:** *સાદુંરૂપ આપો.*

(i) $(3x - 2y)^3 + 3\ (3x - 2y)^2\ (3x + 2y) + 3(3x - 2y)\ (3x + 2y)^2 + (3x + 2y)^3$

(ii) $(2a - b)^3 + 3\ (2a - b)\ (2b - a)\ (a + b) + (2b - a)^3$

ઉકેલ : (i) Put $3x - 2y = a$ and $3x + 2y = b$

આપેલ પદાવલીની અભિવ્યક્તિ નીચે પ્રમાણ બને છે.

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= (a + b)^3$

$= (3x - 2y + 3x + 2y)^3$

$= (6x)^3$

$= 216x^3$

(ii) $2a - b = x$ *અને* $2b - a = y$ *મૂકતાં*

$+ b = x + y$

$x^3 + 3xy\ (x + y) + y^3$

$= (x + y)^3$

$= (a + b)^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

ઉદાહરણ **4.7:** *સાદુંરૂપ આપો.*

(i) $\dfrac{857\times857\times857-537\times537\times537}{857\times857+857\times537+537\times537}$

(ii)

ઉકેલ : આપેલ પદાવલીને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય

$857=a$ *અને* $537=b$, *મૂકતાં પદાવલીનું સ્વરૂપ નીચે મુજબ બને છે.*

$$\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}=a-b$$

$$=857-537 \text{ (a અને b કિંમત મૂકતાં)}$$

$$=320$$

$$\frac{674\times674\times674+326\times326\times326}{674\times674-674\times326+326\times326}$$

$$\frac{857^3-537^3}{857^2+857\times537+537^2}$$

(ii) *આપેલ પદાવલીને નીચે મુજબ લખી શકાય.*

$$\frac{674^3+326^3}{674^2-674\times326+326^2}$$

$$=\frac{(674+326)(674^2-674\times326+326^2)}{674^2-674\times326+326^2}$$

= 674 + 326

= 1000

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 4.2

1. નીચેના દરેકને પદાવલી સ્વરૂપે લખો.

(i) $(3x+4y)^3$ (ii) $(p-qr)^3$ **(iii)** $\left(a+\frac{b}{3}\right)^3$

(iv) $\left(\frac{a}{3}-b\right)^3$ (v) $\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}b^2\right)^3$ (vi) $\left(\frac{1}{3}a^2x^3-2b^3y^2\right)^3$

2. વિશિષ્ટ ગુણન ફળનો ઉપયોગ કરીને નીચેના દરેકનો ઘન શોધો

(i) 8	(ii) 12	(iii) 18	(iv) 23
(v) 53	(vi) 48	(vii) 71	(viii) 69
(ix) 97	(x) 99		

3. વાસ્તવિક ગુણકાર કર્યા સિવાય નીચેના દરેકનું ગુણનફળ શોધો.

(i) $(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$ (ii) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

(iii) $(1 + x)((1 - x + x^2)$ (iv) $(2y - 3z^2)(4y^2 + 6yz^2 + 9z^4)$

(v) $(4x + 3y)(16x^2 - 12xy + 9y^2)$ (vi) $\left(3x - \frac{1}{7}y\right)\left(9x^2 + \frac{3}{7}xy + \frac{1}{49}y^2\right)$

4. કિંમત શોધો.

(i) જો $a + 2b = 10$ અને $ab = 15$ હોય તો $a^3 + 8b^3$ ની કિંમત શોધો.

સૂચન $(a + 2b)^3 = a^3 + 8b^3 + 6ab(a + 2b)$

$a^3 + 8b^3 = (a + 2b)^3 - 6ab(a + 2b)]$ હવે આગળ વધો

(ii) જો $x - y = 5$ અને $xy = 55$ હોય તો $x^3 - y^3$ ની કિંમત શોધો.

5. જો (i) $4x - 5z = 16$ અને $xz = 12$ હોય, તો $64x^3$-$125z^3$ કિંમત શોધો.

(ii) જો $4x - 5z = \frac{3}{5}$ અને $xz = 6$ હોય તો $64x^3$-$125z^3$ ની કિંમત શોધો

6. સાદું રૂપ આપો.

(i) $(2x + 5)^3 - (2x - 5)^3$

(ii) $(7x + 5y)^3 - (7x - 5y)^3 - 30y(7x + 5y)(7x - 5y)^3$

સુચન $7x + 5y = a$ અને $7x - 5y = b$ મૂકો જેથી $a - b = 10y$ થાય]

(iii) $(3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2) - (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$

(iv) $(2x - 5)(4x^2 + 10x + 25) - (5x + 1)(25x^2 - 5x + 1)$

7. સાદું રૂપ આપો.

(i) $\frac{875 \times 875 \times 875 + 125 \times 125 \times 125}{875 \times 875 - 875 \times 125 + 125 \times 125}$

(ii)

4.3 બહુપદીઓનું અવયવી-કરણ

યાદ કરોકે $3 \times 4 = 12$ માં 3 અને 4 એ ગુણનફળ 12 ના અવયવો છે. તેજ રીતે બીજ ગણિતમાં જ્યારે $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$, થાય છે. ત્યારે આપણે $(x+y)$ અને $(x-y)$ એ ગુણનફળ $(x^2 - y^2)$. ના અવયવો છે એમ કહીએ છીએ.

બહુપદીનું અવયવી કરણ એ બહુપદીને બે (કે વધુ) બહુપદીઓના ગુણનફળ તરીકે દર્શાવવાની પ્રક્રિયા છે. ગુણનફળમાં રહેલી દરેક બહુપદી આપેલ બહુપદીનો અવયવ કહેવાય છે.

અવયવીકરણમાં જ્યાં સુધી ઉલ્લેખ કરવામાં ન આવ્યો હોય ત્યાં સુધી આપેલ બહુપદીઓના અવયવો પૂર્ણાંકમાં (એટલે કે પૂર્ણાંક સહગુણકો સાથે) દર્શાવવા પૂરતું મર્યાદિત રાખીશું. આવા કિસ્સાઓમાં એ જરૂરી છે કે અવયવો પણ પૂર્ણાંક બહુપદીમાંજ હોવા જોઈએ $2x^2 - y^2$ *પ્રકારની બહુપદી પ્રકારના અવયવો પાડવા માટે યોગ્ય ગણાવી જોઈએ નહીં. કારણે કે આ અવયવો પૂર્ણાંક બહુપદીઓ નથી.*

જ્યારે કોઈ બહુપદીનો એક પણ અવયવ ફરીથી ઓછીઘાતવાળી બે બહુપદીઓમાં ગુણનફળ તરીકે દર્શાવી શકાતી ન હોય અને પૂર્ણાંક સહગુણકોમાં જો 1 અથવા 1 સિવાયનો બીજો કોઈ અવયવ સામાન્ય ન હોય, ત્યારે તે બહુપદીનું સંપૂર્ણ અવયવીકરણ થયું છે એમ કહેવાય આમ .... નું સંપૂર્ણ અવયવીકરણ $x(x-4)$ *છે. જ્યારે બીજીબાજુ* $(4x^2 - 1)(4x^2 + 1)(16x^4 - 1)$*નું સંપૂર્ણ અવયવી-કરણ*

$\left(\sqrt{2}x + y\right)\left(\sqrt{2}x - y\right)$

નથી કારણ કે અવયવ $(4x^2 - 1)$ *ના ફરીથી* $(2x - 1)(2x + 1)$ *જેવા અવયવો પાડી શકાય છે. આમ* $(16x^4 - 1)$ *નું સંપૂર્ણ અવયવીકરણ 1)* $(4x^2 + 1)$. *છે.*

અવયવીકરણમાં આપણે આ પાઠમાં અગાઉ શીખી ગયેલા વિશિષ્ટ ગુણનફળોનો પૂરેપુરો ઉપયોગ કરતા રહીશું. હવે બહુપદીના અવયવી કરણમાં વિવિધ પ્રકારો માટે અલગ અલગ ઉદાહરણ લઈએ.

(1) વિભાજનના ગુણધર્મ પ્રમાણે અવયવી કરણ :

(સામાન્ય અવયવ બહાર કાઢવાની રીત)

ઉદાહરણ 4.8 અવયવ પાડો.

(i) $10a - 25$ (ii) $x^2y^3 + x^3y^2$

(iii) $5ab(ax^2 + y^2) - 6mn(ax^2 + y^2)$ (iv) $a(b - c)^2 + b(b - c)$

ઉકેલ (i) $10a - 25 = 5 \times 2a - 5 \times 5$

$= 5(2a - 5)$ [*બંને પદોમાં ૫ સામાન્ય હોવાથી)*

આમ 5 *અને* $2a - 5$ *અને* $10a - 25$ *ના અવયવ છે.*

(ii) $x^2y^3 + x^3y^2$, *માં જુઓ કે બંને પદોમાં (સૌથી ઉંચી ઘાતવાળુ)*

x^2y^2 *(પદ) સામાન્ય છે.*

$\backslash\ x^2y^3 + x^3y^2 = x^2y^2 \times y + x^2y^2 \times x$

$= x^2y^2\,(y + x)$

$x, x^2, y, y^2, xy, x^2y, xy^2, x^2y^2$ *અને* $y + x$ *એ* $x^2y^3 + x^3y^2$ *ના અવયવો છે.*

(iii) *જુઓ કે* $ax^2 + y^2$ *એ બંને પદોમાં સામાન્ય છે.*

$5ab\,(ax^2 + y^2) - 6mn(ax^2 + y^2)$

$= (ax^2 + y^2)\,(5ab - 6mn)$

(iv) $a(b - c)^2 + b(b - c) = (b - c) \times [a(b - c)] + (b - c) \times b$

$= (b - c) \times [a(b - c) + b]$

$= (b - c) \times [ab - ac + b]$

(2) બે વર્ગોના તફાવતનું અવયવીકરણ

તમે જાણો છો કે $(x + y)\,(x - y) = x^2 - y^2$ *તેથી* $x + y$ *અને* $x - y$ *એ* $x^2 - y^2$ *ના અવયવો છે.*

ઉદાહરણ 4.9: *અવયવ પાડો*

(i) $9x^2 - 16y^2$ (ii) $x^4 - 81y^4$

(iii) $a^4 - (2b - 3c)^2$ (iv) $x^2 - y^2 + 6y - 9$

ઉકેલ (i) $9x^2 - 16y^2 = (3x)^2 - (4y)^2$ *જે વર્ગોનો તફાવત છે.*

$= (3x + 4y)\,(3x - 4y)$

(ii) $x^4 - 81y^4 = (x^2)^2 - (9y^2)$

$= (x^2 + 9y^2)\,(x^2 - 9y^2)$

ધ્યાનમાં રાખો કે $x^2 - 9y^2 = (x)^2 - (3y)^2$ *એ બે વર્ગોનો તફાવત છે.*

$x^4 - 81y^4 = (x^2 + 9y^2)\,[(x)^2 - (3y)^2]$

$= (x^2 + 9y^2)\,(x + 3y)\,(x - 3y)$

(iii) $a^4 - (2b - 3c)^2 = (a^2)^2 - (2b - 3c)^2$

$= [a^2 + (2b - 3c)]\,[a^2 - (2b - 3c)]$

$= (a^2 + 2b - 3c)\,(a^2 - 2b + 3c)$

(iv) $x^2 - y^2 + 6y - 9 = x^2 - (y^2 - 6y + 9)$ *[આ સોપાન ધ્યાનમાં રાખો)*

$= (x)^2 - [(y)^2 - 2 \times y \times 3 + (3)^2]$

$= (x)^2 - (y - 3)^2$

$= [x + (y - 3)]\,[x - (y - 3)]$

$$= (x + y - 3)\ (x - y + 3)$$

(3) *પૂર્ણવર્ગ ત્રિપદીનું અવયવીકરણ*

ઉદાહરણ **4.10 :** *અવયવ પાડો*

(i) $9x^2 + 24xy + 16y^2$ (ii) $x^6 - 8x^3 + 16$

ઉકેલ (i) $9x^2 + 24xy + 16y^2 = (3x)^2 + 2\ (3x)\ (4y) + (4y)^2$

$$= (3x + 4y)^2$$

$$= (3x + 4y)\ (3x + 4y)$$

આમ આપેલ બહુપદીના અવયવો દરેક $(3x + 4y)$ *થાય છે.*

(ii) $x^6 - 8x^3 + 16 = (x^3)^2 - 2(x^3)\ (4) + (4)^2$

$$= (x^3 - 4)^2$$

$$= (x^3 - 4)\ (x^3 - 4)$$

આપેલ બહુપદીના અવયવો દરેક $(x^3 - 4)$. *થાય છે.*

(4) *બહુપદીનું બે વર્ગોના તફાવતમાં ફેરવીને અવયવી કરણ*

ઉદાહરણ **4.11:** *અવયવ પાડો*

(i) $x^4 + 4y^4$ (ii) $x^4 + x^2 + 1$

(i) $x^4 + 4y^4 = (x^2)^2 + (2y^2)^2$

$$= (x^2)^2 + (2y^2)^2 + 2\ (x^2)\ (2y^2) - 2\ (x^2)\ (2y^2)$$

$2\ (x^2)\ (2y^2)$ *ઉમેરીને અને બાદ કરીને*

$$= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2$$

$$= (x^2 + 2y^2 + 2xy)\ (x^2 + 2y^2 - 2xy)$$

(ii) $x^4 + x^2 + 1 = (x^2)^2 + (1)^2 + 2x^2 - x^2$

[x^2 *ઉમેરીને અને બાદ કરીને*]

$$= (x^2 + 1)^2 - (x)^2$$

$$= (x^2 + x + 1)\ (x^2 - x + 1)$$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 4.3

અવયવ પાડો

1. $10\,xy - 15xz$
2. $abc^2 - ab^2c$

3. $6p^2 - 15pq + 27p$	4. $a^2(b-c) + b(c-b)$
5. $2a(4x-y)^3 - b(4x-y)^2$	6. $x(x+y)^3 - 3xy(x+y)$
7. $100 - 25p^2$	8. $1 - 256y^8$
9. $(2x+1)^2 - 9x^2$	10. $(a^2+bc)^2 - a^2(b+c)^2$
11. $25x^2 - 10x + 1 - 36y^2$	12. $49x^2 - 1 - 14xy + y^2$
13. $m^2 + 14m + 49$	14. $4x^2 - 4x + 1$
15. $36a^2 + 25 + 60a$	16. $x^6 - 8x^3 + 16$
17. $a^8 - 47a^4 + 1$	18. $4a^4 + 81b^4$
19. $x^4 + 4$	20. $9a^4 - a^2 + 16$

21. n ની કિંમત શોધો.

(i) $6n = 23 \times 23 - 17 \times 17$ (ii) $536 \times 536 - 36 \times 36 = 5n$

(5) પૂર્ણઘન બહુપદીઓનું અવયવીકરણ

ઉદાહરણ 4.12: અવયવ પાડો

(i) $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$ (ii) $x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6$

ઉકેલ (i) $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$

$$= (x)^3 + 3x^2(2y) + 3x(2y)^2 + (2y)^3$$

$$= (x+2y)^3$$

$$x + 2y.$$

(ii) $(x^2)^3 - 3x^2y^2(x^2 - y^2) - (y^2)^3$

$$= (x^2 - y^2)^3$$

$$= [(x+y)(x-y)]^3 \qquad [x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)]$$

$$= (x+y)^3 (x-y)^3$$

(6) બે ઘનના સરવાળા અને તફાવતવાળી બહુપદીનું અવયવીકરણ

વિશિષ્ટ ગુણનફળમાં તમે શીખી ગયા છો કે

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$$

અને $(x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$

$x^3 + y^3$ ના અવયવો $x + y$ અને $x^2 - xy + y^2$ અને

$x^3 - y^3$ ના અવયવો $x - y$ અને $x^2 + xy + y^2$ છે.

હવે નીચેના ઉદાહરણ જુઓ :

ઉદાહરણ 4.13: *અવયવપાડો*

(i) $64a^3 + 27b^3$ (ii) $8x^3 - 125y^3$

(iii) $8\,(x + 2y)^3 - 343$ (iv) $a^4 - a^{13}$

(i) $64a^3 + 27b^3 = (4a)^3 + (3b)^3$

$= (4a + 3b)\,[(4a)^2 - (4a)(3b) + (3b)^2]$

$= (4a + 3b)\,(16a^2 - 12ab + 9b^2)$

(ii) $8x^3 - 125y^3 = (2x)^3 - (5y)^3$

$= (2x - 5y)\,[(2x)^2 + (2x)(5y) + (5y)^2]$

$= (2x - 5y)\,(4x^2 + 10xy + 25y^2)$

(iii) $8\,(x + 2y)^3 - 343 = [2(x + 2y)]^3 - (7)^3$

$= [2(x + 2y) - 7]\,[2^2\,(x + 2y)^2 + 2(x + 2y)\,(7) + 7^2]$

$= (2x + 4y - 7)\,(4x^2 + 16xy + 16y^2 + 14x + 28y + 49)$

(iv) $a^4 - a^{13} = a^4\,(1 - a^9)$ [*કારણ કે બંને પદમાં* a^4 *સામાન્ય છે.*]

$= a^4\,[(1)^3 - (a^3)^3]$

$= a^4\,(1 - a^3)\,(1 + a^3 + a^6)$

$= a^4\,(1 - a)\,(1 + a + a^2)\,(1 + a^3 + a^6)$

[Since $1 - a^3 = (1 - a)\,(1 + a + a^2)$]

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 4.4

અવયવ પાડો

1. $a^3 + 216b^3$
2. $a^3 - 343$
3. $x^3 + 12x^2y + 48xy^2 + 64y^3$
4. $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$
5. $8x^3 - 125y^3 - 60x^2y + 150xy^2$
6. $64k^3 - 144k^2 + 108k - 27$
7. $729\,x^6 - 8$
8. $x^2 + x^2\,y^6$
9. $16a^7 - 54ab^6$
10. $27b^3 - a^3 - 3a^2 - 3a - 1$
11. $(2a - 3b)^3 + 64c^3$
12. $64x^3 - (2y - 1)^3$

---

(7) મધ્યમપદના વિભાજન દ્વારા ત્રિપદી (બહુપદીના અવયવો પાડવાની રીત :

આપણે શીખી ગયા છીએ કે

$(x + a)\,(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab = 1.x^2 + (a + b)x + ab$

અને $(ax + b)\,(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

અહીં જમણી બાજુ દર્શાવેલી પદાવલીઓ સામાન્ય રીતે ax^2 x bx x c *પ્રકારની છે. જેમના અવયવો નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે પાડી શકાય.*

નોંધ

- પ્રથમપદ x^2 ના સહગુણકને અંતિમપદ વડે ગુણો

- એ ગુણનફળના એવા બે અવયવ શોધો કે જેમનો સરવાળો મધ્યમપ (બીજાપદ) ac ના સહગુણક જેટલો થાય બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો આપણે ac (પ્રથમપદનો સહગુણાંક અંતિમપદ) ના એવા બે અવયવો નક્કી કરવાના છે કે જેમનો સરવાળો ac (મધ્યમપદના સહગુણક) જેટલો થાય.

નીચે આપેલાં ઉદાહરણો આ રીતેની વધારે ચકાસણી કરશે.

ઉદાહરણ 4.14: અવયવ પાડો

(i) $x^2 + 3x + 2$ (ii) $x^2 – 10xy + 24y^2$

(iii) $5x^2 + 13x – 6$ (iv) $3x^2 – x – 2$

ઉકેલ (i) અહીં, A = 1, B = 3 અને C= 2; so AC = 1 × 2 = 2

તેથી આપણે 2 ના એવા બે અવયવો નક્કી કરવાના છે કે જેમનો સરવાળો 3 થાય

દેખીતી રીતે 1+2=3 (એટલે કે ac ના બે અવયવો 1 અને 2 છે.)

બહુપદીને નીચે પ્રમાણે દર્શાવીશું.

$$x^2 + (1 + 2)\, x + 2$$
$$= x^2 + x + 2x + 2$$
$$= x(x + 1) + 2(x + 1)$$
$$= (x + 1)\,(x + 2)$$

(ii) $x^2 – 4xy – 6xy + 24\, y^2$ અહીં $AC = 24y^2$ અને $B = – 10y$ છે.

$24y^2$ ના બે અવયવો કે જેમનો સરવાળો $– 10y$ છે તે

$–4y$ અને $–6y$ છે.

બહુપદીને નીચે પ્રમાણે લખીએ.

$= x(x – 4y) – 6y(x – 4y)$

$= (x – 4y)\,(x – 6y)$

(iii) $5x^2 + 13x - 6$ અહીં $ac = -30$ અને $b= 13$ છે.

-30 ના અવયવો કે જેમનો સરવાળો -30 છે તેઓ 15 અને -2 છે.

બહુપદીને $5x^2 + 15x – 2x – 6$ સ્વરૂપે લખીએ.

$$= 5x(x + 3) – 2(x + 3)$$
$$= (x + 3)\,(5x – 2)$$

(iv) $3x^2-x-2$ અહીં $ac = 6$ અને $b = -1$ છે.

-6 ના એવા બે અવયવ શોધવા છે કે જેમનો સરવાળો -1 થાય તેઓ (-3) અને 2 છે.

બહુપદીને $3x^2 - 3x + 2x - 2$ સ્વરૂપે લખાય.

$$3x^2 - 3x + 2x - 2$$
$$= 3x(x - 1) + 2(x - 1)$$
$$= (x - 1)(3x + 2)$$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 4.5

અવયવ પાડો

1. $x^2 + 11x + 24$
2. $x^2 - 15xy + 54y^2$
3. $2x^2 + 5x - 3$
4. $6x^2 - 10xy - 4y^2$
5. $2x^4 - x^2 - 1$
6. $x^2 + 13xy - 30y^2$
7. $2x^2 + 11x + 14$
8. $10y^2 + 11y - 6$
9. $2x^2 - x - 1$
10. $(m - 1)(1 - m) + m + 109$
11. $(2a - b)^2 - (2a - b) - 30$
Hint put $2a - b = x$
12. $(2x + 3y)^2 - 2(2x + 3y)(3x - 2y) - 3(3x - 2y)^2$
Hint: Put $2x + 3y = a$ and $3x - 2y = b$

4.4 બહુપદીઓના ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ.

(1) બહુપદીઓનો ગુ.સા.અ.

અંકગણિતમાં પ્રાકૃતિનું સંખ્યાઓના ગુ.સા.અ. (ગુરૂત્તમ સાધારણ અવયવ) શબ્દથી પહેલેથીજ પરિચિત છો. તે (ગુ.સા.અ) આપેલી દરેક સંખ્યાઓના અવયવોમાં સૌથી મોટો અવયવ છે. દાખલા તરીકે 8 અને 12 નો ગુ.સા.અ. 4 છે. કારણ કે 8 અને 12 ના સામાન્ય અવયવો 1,2, અને 4 છે. તેમાં 4 સૌથી મોટી સંખ્યા છે. (એટલે કે એ બધામાં મોટી)

તેવીજ રીતે બીજ ગણિતમાં બે કે તેથી વધારે બહુપદીઓનો ગુ.સા.અ. (ગુરુત્તમ સાધારણ અવયવ) એ સૌથી વધારે ઘાત વાળી બહુપદી, અને આપેલ બહુપદીઓમાંની દરેક બહુપદીમાં હોય તેવા અવયવના સૌથી મોટા સાંખિત સહગુણકનું ગુણનફળ છે. ઉદાહરણ તરીકે $4(x+1)^2$ અને $6(x+1)^3$ માં ગુ.સા.અ. $2(x+1)^2$ છે.

એકપદીઓનો ગુ.સા.અ. અને આપેલ બહુપદીઓમાંની દરેક બહુપદીનો સાંખિક સહગુણાક અને આપેલી બધીજ એક પદીઓમાં સામાન્ય હોય તેવા સૌથી વધારે ઘાતવાળા ચલ (ચલો) ના ગુણાકારથી મેળવી શકાય છે.

દાખલા તરીકે $12x^2 2y^3$, $18xy^4$ અને $24x^3y^5$ આપેલ એકપદીઓ નો ગુ.સા.અ. $6xy^3$ છે. કારણ કે 12, 18 અને 24 નો ગુ.સા.અ. 6 અને બધીજ બહુપદીઓ (એકપદીઓ) નાં સૌથી ઉંચી ઘાતવાળા સામાન્ય પદો x અને y છે.

આ અંગે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 4.15: નીચેનામાં ગુ.સા.અ. શોધો.

(i) $4x^2y$ અને x^3y^2 (ii) $(x-2)^3(2x-3)$ અને $(x-2)^2(2x-3)^3$

ઉકેલ: (1) સાંખિક સહગુણકો 4 અને I નો ગુ.સા.અ. 1 છે.

જ્યારે આપેલ બહુપદીઓમાં અવયવ તરીકે x ઓછામાં ઓછાં 2 (બે) વખત આવે છે અને y ઓછામાં ઓછા 1 વખત આવે છે તેથી તેમનો ગુ.સા.અ.

$1 \times x^2 \times y$ એટલે x^2y

(2) સાંખિક સહગુણકો 1 અને 1 નો ગુ.સા.અ. 1 છે.

આપેલ બહુપદીઓમાં અવયવ તરીકે $(x-2)$ ઓછામાં ઓછા બે વખત આવે છે અને $(2x-3)$ ઓછામાં ઓછા એક વખત આવે છે તેથી આવેલ બહુપદીઓનો ગુ.સા.અ.

$1 \times (x-2)^2 \times (2x-3)$ એટલે $(x-2)^2(2x-3)$ છે.

ઉપરના ઉદાહરણ 4.15 માં દ્દષ્ટિપાત કરતાં આપણે કહી શકીએ કે જેના સરળતાથી અવયવો પાડી શકાય એવી બહુપદીઓનો ગુ.સા.અ. નક્કી કરવા માટે આપણે દરેક બહુપદીને અવયવોના ગુણાનફુળ તરીકે દર્શાવીએ છીએ આ પરિસ્થિતિના આધારે આપેલ બહુપદીનો ગુ.સા.અ. આવેલ બહુપદીઓમાંની દરેક બહુપદીના સાંખિક સગુણકોનો ગુ.સા.અ. અને બધી બહુપદીઓમાં સામાન્ય હોય તેવા સૌથી વધુ ઘાતવાળા અવયવ (અવયવો)નું ગુણનફળ છે.

વધારે સ્પષ્ટતા માટે નીચે આપેલ ઉદાહરણ 4.16 પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરો.

ઉદાહરણ 4.16: ગુ.સા.અ. શોધો.

(i) x^2-4 અને x^2+4x+4

(ii) $4x^4-16x^3+12x^2$ અને $6x^3+6x^2-72x$

ઉકેલ (i) $x^2-4=(x+2)(x-2)$

$x^2+4x+4=(x+2)^2$

સાંખિક સહગુણકોનો ગુ.સા.અ. 1 છે.

બીજા અવયવોનો ગુ.સા.અ. $=(x+2)^1=x+2$

તેથી માગેલો ગુ.સા.અ. $=x+2$

(ii) $4x^4-16x^3+12x^2 \quad = 4x^2(x^2-4x+3)$

$$= 4x^2 (x-1)(x-3)$$

$$6x^3 + 6x^2 - 72x \quad = 6x (x^2 + x - 12)$$

$$= 6x (x+4)(x-3)$$

માંગેલ ગુ.સા.અ. $= 2x(x-3)$ (કારણ કે સાંખિક સહગુણકોનો ગુ.સા.અ. 2 છે.)

$$= 2x^2 - 6x$$

(2) બહુપદીઓનો લ.સા.અ.

ગુ.સા.અ.ની માફક અંકગણિતમાં પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના લ.સા.અ. (લઘુત્તમ સાધારણ અવયવી) થી પણ પરિચિત છો. તે (લ.સા.અ.) આપેલી સંખ્યાઓના અવયવીઓમાં સૌથી નાનો સામાન્ય અવયવી (સાંની સંખઅયા) છે.

દાખલા તરીકે 8 અને 12નો લ.સા.અ. 24 છે કારણ કે 24 એ 8 અને 12ના સામાન્ય અવયવીઓમાં સૌથી નાનો છે જે નીચે પ્રમાણે છે.

8ના અવયવી	8, 16, <u>24</u>, 32, 40, <u>48</u>, 56, 64, <u>72</u>, 80, ...
12ના અવયવી	12, <u>24</u>, 36, <u>48</u>, 60, <u>72</u>, 84, 96, ...
8 અને 12ના સામાન્ય અવયવી	24, 48, 72, ...

તેવી જ રીતે બીજગણિતમાં બે કે તેથી વધારે બહુપદીઓનો લ.સા.અ. (લઘુત્તમ સાધારણ અવયવી) એ સૌથી લઘુત્તમ ઘાત વાળી બહુપદી (બહુપદીઓ) અને આપેલ બહુપદીઓમાંની દરેક બહુપદીના અનુરૂપ ઘટકોના અવયવી હોય તેવા સૌથી નાના સાંખિક સહગુણકનું ગુણનફળ છે.

ઉદાહરણ તરીકે $4(x+1)^2$ અને $6(x+1)^3$ નો લ.સા.અ. $12(x+1)^3$.

એકપદીનો લ.સા.અ. એ આપેલ એકપદીઓમાંની દરેક એક પદીના સાંખિક સહગુણકોનો લ.સા.અ. અને સૌથી ઊંચા ઘાતવાળા ચલોના અવયવોના ગુણાકાસ્થી મેળવી શકાય છે.

ઉદારણ તરીકે $12x^2y^2z$ અને $18x^2yz$ નો લ.સા.અ. $36x^2y^2z$ છે કારણ કે 12 અને 18 નો લ.સા.અ. 36 છે અને સૌથી ઉંચી ઘાતવાળા ચલો x, y અને z ના અવયવો અનુક્રમે x^2, y^2 અને z છે. ચાલો તેને સ્પષ્ટ કરવામાટે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણો 4.17: લ.સા.અ. શોધો.

(i) $4x^2y$ અને x^3y^2 (ii) $(x-2)^3(2x-3)$ અને $(x-2)^2(2x-3)^3$

ઉકેલ : (1) $4x^2y$ અને x^3y^2 માં સાંખિક સહગુણકો 4 અને 1 નો લ.સા.અ. 4 છે અને x નો મહત્તમ ઘાત x^3 અને y નો મહત્તમ ઘાત y^2 હોવાથી માંગેલો (જરૂરી) લ.સા.અ. $4x^2y^2$ છે.

(2) દેખીતી રીતે જ સાંખિક સહગુણકો 1 અને 1 નો લ.સા.અ. 1 છે. આપેલ બહુપદીઓના અવયવ (x-2)નો મહત્તમ ઘાત વાળો અવયવ $(x-2)^3$ છે અને (2x-3) નો મહત્તમ ઘાતવાળો અવયવ $(2x-3)^3$

છે.

આપેલ બહુપદીનો લ.સા.અ. $= 1 \times (x-2)^3 \times (2x-3)^3$

$= (x-2)^3 (2x-3)^3$

ઉદાહરણ4.18: માં દૃષ્ટિપાત કરતાં આપણે કહી શકીએ કે

(i) $(x-2)(x^2-3x+2)$ અને x^2-5x+6

(ii) $8(x^3-27)$ અને $12(x^5+27x^2)$

ઉકેલ (i) $(x-2)(x^2-3x+2) = (x-2)(x-2)(x-1)$

$= (x-2)^2 (x-1)$

વળી $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$

સાંખ્યિક સહગુણકોનો લ.સા.અ. 1 છે.

બીજા અવયવોનો લ.સા.અ. $= (x-2)^2 (x-1)(x-3)$

તેથી આપેલ બહુપદીઓનો લ.સા.અ. $= (x-1)(x-2)^2(x-3)$

(ii) $8(x^3-27) = 8(x-3)(x^2+3x+9)$

$12(x^5+27x^2) = 12x^2(x^3+27)$

$= 12x^2(x+3)(x^2-3x+9)$

સાંખ્યિક સહગુણકો 8 અને 12 નો લ.સા.અ. $=24$

અન્ય અવયવોનો લ.સા.અ. $= x^2(x-3)(x+3)(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

તેથી માગેલ લ.સા.અ. $= 24x^2(x-3)(x+3)(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 4.6

1. નીચેની બહુપદીઓના ગુ.સા.અ. શોધો.

(i) $27x^4y^2$ અને $3xy^3$ (ii) $48y^7x^9$ અને $12y^3x^5$

(iii) $(x+1)^3$ અને $(x+1)^2(x-1)$ (iv) x^2+4x+4 અને $x+2$

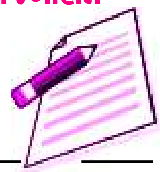
(v) $18(x+2)^3$ અને $24(x^3+8)$ (vi) $(x+1)^2(x+5)^3$ અને $x^2+10x+25$

(vii) $(2x-5)^2(x+4)^3$ અને $(2x-5)^3(x-4)$ (viii) x^2-1 અને x^4-1

(ix) x^3-y^3 અને x^2-y^2 (x) $6(x^2-3x+2)$ અને $18(x^2-4x+3)$

2. નીચેની પદાવલીઓને ધ્યાનતાં લો.

(i) $25x^3y^2$ અને $15xy$ (ii) $30xy^2$ અને $48x^3y^4$



(iii) $(x+1)^3$ અને $(x+1)^2(x-1)$ (iv) x^2+4x+4 અને $x+2$

(v) $18(x+2)^3$ અને $24(x^3+8)$ (vi) $(x+1)^2(x+5)^3$ અને $x^2+10x+25$

(vii) $(2x-5)^2(x+4)^2$ અને $(2x-5)^3(x-4)$ (viii) x^2-1 and x^4-1

(ix) x^3-y^3 અને x^2-y^2 (x) $6(x^2-3x+2)$ અને $18(x^2-4x+3)$

4.5 સંમેય પદાવલી પરની પ્રક્રિયાઓ

તમે પૂર્ણાંક અને સંમેય સંખ્યાઓથી પરિચિત છો. જે સંખ્યાને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય જ્યાં (p અને q=1)અને પૂર્ણાંક છે તેને સંમેય પદાવલી કહેવાય છે.

બૈજિક પદાલી કે જેને $\frac{P}{Q}$ સ્રૂપમાં દર્શાવી શકાય જ્યાં p અને q (શૂન્યતર બહુપદીઓ) હુપદીઓ ને સંમેય પદાવલી કહેવાય છે. આમ નીચેના જેવી દરેક પદાવલી એક અથવા બે ચલમાં સંમેય પદાવલી છે.

$$\frac{x+1}{x-1},\ \frac{x^2-3x+5}{x^2-5},\ \frac{\frac{1}{2}a^2+b^2-\frac{5}{6}}{a+b},\ \frac{x^2+\sqrt{2}y^2}{\sqrt{3}x-y}$$

નોંધ:

(1) બહુદી 'x^2+1' એ સંમેય પદાવલી છે કારણ કે તેને $\frac{x^2+1}{1}$ સ્વરૂપે લખી શકાય છે અને તમે શીખી ગયા છો કે છેદમાં રહેલ અચળ સંખ્યા '1' એ શૂન્ય શૂન્યઘાતવાળી બહુપદી છે.

(2) બહુપદી 7 એ સંમેય પદાવલી છે કારણ કે તેને $\frac{7}{1}$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય છે જ્યાં 7 અને 1 બંને શૂન્યઘાતવળી બહુપદીઓ છે.

(3) દેખીતી રીતેજ સંમેય પદાલી એ બહુપદી ન પણ હોય ઉદાહરણ તરીકે સંમેય પદાવલી $\frac{1}{x}\left(=x^{-1}\right)$ એ બહુપદી નથી. એથી ઉલટું દરેક બહુપદી સંમેય પદાલી છે.

નીચેની પદાવલીઓને ધ્યાનમાં લો.

$\dfrac{\sqrt{x}+2}{1-x}$, $x^2+2\sqrt{x}+3$, $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{b}}{a^2+ab+b^2}$ આમાંની એકપણ પદાવલી સંમેય પદાવલી નથી.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 4.7

1. નીચેનામાંથી કઈ પદાલીઓ સંમેય પદાવલીઓ છે?

(1) $\dfrac{2x-3}{4x-1}$ (2)

(3) $\dfrac{2\sqrt{3}x^2+\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ (4) $\dfrac{2x^2-\sqrt{x}+3}{6x}$

(5) $200+\sqrt{11}$ (6) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\div b^{\frac{1}{3}}$

(7) $y^3+3yz(y+z)+z^3$ (8) $5\div(a+3b)$

2. નીચેના દરેક માટે બે ઉદાહરણ આપો.

(1) એક ચલ સંમેય પદાવલી

(2) દ્વિચલ સંમેય પદાવલી

(3) સંમેય પદાવલી જેનો અંશ દ્વિપદી અને છેદ ત્રિપદી હોય.

(4) સંમેય પદાવલી જેનો અંશ અચળ હોય અને છેદ દ્વિઘાત બહુપદી હોય.

(5) દ્વિચલ સંમેય પદાવલી જેનો અંશ ત્રિઘાત બહુપદીઓ છેદ પંચઘાત બહુપદી હોય.

(6) બૈજિક પદાલી જે સંમેય પદાલી ન હોય.

4.6 સંમેય પદાવલી પરની પ્રક્રિયાઓ

સંમેય સંખ્યાઓ પર જે રીતે મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ થાય છે તેજ રીતે સંમેય પદાવલી પર પણ ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ થાય છે.

(1) સંમેય પદાવલીના સરવાળા અને બાદબાકી

સંમેય સંખ્યા અને સંમેય પદાવલીના સરવાળાની સામ્યતા જોવા આપણે નીચેના ઉદાહરણો જોઈશુ. નોંધો કે સંમેય પદાલીઓના ગુણાકાર, ભાગાકાર અને બાદબાકીમાં પણ સામ્યતા જોવા મળે છે. (સામ્યતા સાચી પડે છે.)

ઉદાહરણ 4.19: સરવાળો કરો :

(i) (ii) $\frac{2x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}$

ઉકેલ : (i) $= \frac{5\times4+3\times3}{24}$

$=$

$=$

(ii) $\frac{2x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x+1} =$

$=$

$= \frac{3x^2+4x-1}{x^2-1}$

ઉદાહરણ 4.20 : બાદબાકી કરો $\frac{x-1}{x+1}$ માંથી $\frac{3x-2}{3x+1}$

ઉકેલ : $\frac{3x-2}{3x+1}-\frac{x-1}{x+1} =$

$=$

$= \frac{3x-1}{3x^2+4x+1}$

નોંધ : *જુઓ કે બે સંમેય પદાવલીઓનો સરવાળો અને બાદબાકી કરતો સંમેય પદાવલીના સરવાળા અને બાદબાકી કરતા સંમેય પદાવલી મળે છે.*

બે સંમેય પદાવલીના સરવાળા અને બાદબાકી કરતાં સંમેય પદાવલી જ મળે છે.

અને $x-\frac{1}{x}(x\neq0)$ *આ બંને સંમેયી પદાવલીઓ છે. કારણ કે -- અને* $\frac{1}{x}$ *બંને સંમેય પદાવલીઓ છે.*

તે જ રીતે $x^2+\frac{1}{x^2}, x^3+\frac{1}{x^3}, x^2-\frac{1}{x^2}, x^3-\frac{1}{x^3}$, વગેરે દરેક સંમેય પદાવલીઓ રસ પેદા કરે છે.

કારણ કે $x+\frac{1}{x}$ અથવા $x-\frac{1}{x}$,ની આપેલી કિંમત માટે

આપણે $x^2+\frac{1}{x^2}, x^2-\frac{1}{x^2}, x^3+\frac{1}{x^3}, x^3-\frac{1}{x^3}$ વગેરેમાં આપણે નક્કી કરી શકીએ છીએ અને કિસ્સાઓમાં તો તેથી ઉલટું પણ (કરી શકીએ છીએ.)

નીચેના દાખલાઓ (ઉદાહરણો) પર ધ્યાન રાખીએ.

ઉદાહરણ 4.21: નીચેનાની કિંમત શોધો.

(i) $x^2+\frac{1}{x^2}$ if $x-\frac{1}{x}=1$ (ii) $x^4+\frac{1}{x^4}$ if $x+\frac{1}{x}=4$

(iii) $x-\frac{1}{x}$ if $x^4+\frac{1}{x^4}=119$ (iv) $x^3+\frac{1}{x^3}$ if $x+\frac{1}{x}=3$

(v) $x^3-\frac{1}{x^3}$ if $x-\frac{1}{x}=5$

ઉકેલ: (1) $x-\frac{1}{x}=1$ આપેલુ છે.

$$\therefore \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=(1)^2$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-2\times x\times\frac{1}{x}=1$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-2=1$$

તેથી, $x^2+\frac{1}{x^2}=3$

(ii) $x+\frac{1}{x}=4$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=(4)^2$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2=16$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=14$$

$$\Rightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=(14)^2$$

$$\Rightarrow x^4+\frac{1}{x^4}+2=196$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=194$$

(iii) $x^4+\frac{1}{x^4}=119$ આપેલું છે.

$$\Rightarrow (x^2)^2+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2+2=119+2=121$$

$$\Rightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=(11)^2$$

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=11$ [કારણ કે x^2 અને $\frac{1}{x^2}$ ઘન છે.]

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-2=9$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=(3)^2$$

$$\therefore x-\frac{1}{x}=\pm 3$$

(iv) $x+\frac{1}{x}=3$ આપેલ છે.

$$\therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^3=(3)^3$$

$$\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+3\times x\times\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=27$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(3) = 27$$

$$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

(v) $x - \frac{1}{x} = 5$ આપેલ છે.

$$\therefore \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = (5)^3$$

$$\Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} - 3 \times x \times \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right) = 125$$

$$\Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} - 3(5) = 125$$

$$\therefore x^3 - \frac{1}{x^3} = 140$$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 4.8

1. સંમેય પદાવલીઓનો સરવાળા શોધો.

(i) $\frac{x^2+1}{x-2}$ અને $\frac{x^2-1}{x-2}$

(ii) $\frac{x+2}{x+3}$ અને $\frac{x-1}{x-2}$

(iii) $\frac{x+1}{(x-1)^2}$ અને $\frac{1}{x+1}$

(iv) $\frac{3x+2}{x^2-16}$ અને $\frac{x-5}{(x+4)^2}$

(v) $\frac{x-2}{x+3}$ અને $\frac{x+2}{x+3}$

(vi) $\frac{x+2}{x-2}$ અને $\frac{x-2}{x+2}$

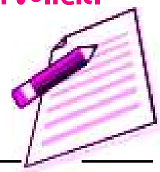
(vii) $\frac{x+1}{x+2}$ અને $\frac{x^2-1}{x^2+1}$

(vii) $\frac{3\sqrt{2}x+1}{3x^2}$ અને $\frac{-2\sqrt{2}x+1}{2x^2}$

2. બાદબાકી કરો.

(i) $\frac{x-1}{x-2}$ માંથી $\frac{x+4}{x+2}$

(ii) $\frac{2x-1}{2x+1}$ માંથી $\frac{2x+1}{2x-1}$



(iii) $\frac{1}{x}$ માંથી x

(iv) $\frac{2}{x}$ માંથી $\frac{x+1}{x^2-1}$

(v) $\frac{x^2+1}{x-4}$ માંથી $\frac{2x^2+3}{x-4}$

(vi) $\frac{1}{x^2+2}$ માંથી $\frac{2x^3+x^2+3}{(x^2+2)^2}$

(vii) $\frac{x+2}{2(x^2-9)}$ માંથી $\frac{x-2}{(x+3)^2}$

(vii) $\frac{x+1}{x-1}$ માંથી $\frac{4x}{x^2-1}$

3. નીચેનાની કિંમત શોધો.

(i) $a^2+\frac{1}{a^2}$ when $a+\frac{1}{a}=2$

(ii) $a^2+\frac{1}{a^2}$ when $a-\frac{1}{a}=2$

(iii) $a^3+\frac{1}{a^3}$ when $a+\frac{1}{a}=2$

(iv) $a^3+\frac{1}{a^3}$ when $a+\frac{1}{a}=5$

(v) $a^3-\frac{1}{a^3}$ when $a-\frac{1}{a}=\sqrt{5}$ É

(vi) $8a^3+\frac{1}{27a^3}$ when $2a+\frac{1}{3a}=5$

$\frac{2x+1}{x-1}\times\frac{x-1}{x+3}$

(vii) $a^3+\frac{1}{a^3}$ when $a+\frac{1}{a}=\sqrt{3}$

(viii) $a^3+\frac{1}{a^3}$ when $a^2+\frac{1}{a^2}=7, a>0$

(ix) $a-\frac{1}{a}$ when $a^4+\frac{1}{a^4}=727$

(x) $a^3-\frac{1}{a^3}$ when $a^4+\frac{1}{a^4}=34, a>0$

---

2) સંમેય પદાવલીઓના ગુણાકાર અને ભાગાકાર :

તમે બે સંખ્યાના ગુણાકાર વિશે જાણે છો. માનો કે તે, $\frac{2}{3}$ અને $\frac{5}{7}$ છે. તો $\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{2\times5}{3\times7}=\frac{10}{21}$

તેવી જ રીતે બે સંમેય સંખ્યાઓ $\frac{P}{Q}$ અને $\frac{R}{S}$ જ્યાં P, Q, R અને S બહુપદીઓ છે (અને q અને s શૂન્ય નથી.) તેને $\frac{P}{Q}\times\frac{R}{S}$ રીતે $\frac{PR}{QS}$ તમે જોઈ શકો છો કે બે સંમેય સંખ્યાઓનું ગુણનફલ સંમેય સંખ્યા જ મળે છે.

ઉદાહરણ 4.22: ગુણન ફળ શોધો :

(i) $\frac{5x+3}{5x-1}\times\frac{2x-1}{x+1}$

(ii)

(iii)

ઉકેલ : (i) $\frac{5x+3}{5x-1} \times \frac{2x-1}{x+1} \quad =$

$=$

(ii) $\frac{2x+1}{x-1} \times \frac{x-1}{x+3} \quad =$

$=$ [અંશ અને છેદમાંથી સામાન્ય અવઅવ (x –1) દૂર કરતાં]

(iii) $= \frac{(x^2-7x+10)(x^2-7x+12)}{(x-4)^2(x-5)}$

$= \frac{(x-2)(x-5)(x-3)(x-4)}{(x-4)^2(x-5)}$

$=$

અંશ અને છેદમાંથી સામાન્ય અવયવ (x –4) (x – 5) દૂર કરતાં

$= \frac{x^2-5x+6}{x-4}$

તમે જોશો કે અંશ અને દમાંથી ગુ.સા.અ. () કાઢી લેતાં જે પરિણામ (ગુણનફળ) મળે છે. તેને અતિસંક્ષિપ્ત પદ કે અતિસંક્ષિપ્તરૂપ કહે છે.

તમે બે સંમેય સંખ્યાઓ માપો કે $\frac{2}{3}$ અને, $\frac{5}{7}$ ના ભાગાકારથી પરિચિત છો તેમને $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$ જ્યાં $\frac{7}{5}$ એ $\frac{5}{7}$ નો વ્યસ્ત છે એમ લખાય. તેવી જ રીતે સંમેય, શૂન્ય પદાવલી $\frac{P}{Q}$ ને શૂન્યેતર પદાવલી $\frac{R}{S}$ નો ભાગાકાર $\frac{P}{Q} \div \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \times \frac{S}{R}$ લખાય, જ્યાં P,Q, R,અને S બહુપદીઓ છે

અને $\frac{S}{R}$ અને $\frac{R}{S}$ નો વ્યસ્ત છે.

ઉદાહરણ 4.23: *નીચેની સંમેય પદાવલીઓના વ્યસ્ત શોધો.*

(i) $\frac{x^2+20}{x^3+5x+6}$ (ii) $-\frac{2y}{y^2-5}$ (iii) x^3+8

ઉકેલ: (1) $\frac{x^2+20}{x^3+5x+6}$ નો વ્યસ્ત $\frac{x^3+5x+6}{x^2+20}$ છે.

(2) $-\frac{2y}{y^2-5}$ નો વ્યસ્ત $-\frac{y^2-5}{2y}=\frac{5-y^2}{2y}$ છે.

(3) x^3+8 નો વ્યસ્ત $\frac{1}{x^3+8}$ છે.

ઉદાહરણ 4.24: *ભાગાકાર કરો અને પરિણામને અતિસંક્ષિપ્ત રૂપમાં દર્શાવો.*

(i) $\frac{x^2+1}{x-1}\div\frac{x-1}{x+2}=\frac{x^2+1}{x-1}\times\frac{x+2}{x-1}$

$$=\frac{(x^2+1)(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2-2x+1}$$

(ii) $\frac{x^2-1}{x^2-25}\div\frac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5}$

ઉકેલ: (1) $\frac{x^2+1}{x-1}\div\frac{x-1}{x+2}=\frac{x^2+1}{x-1}\times\frac{x+2}{x-1}$

$$=\frac{(x^2+1)(x+2)}{(x-1)^2}=\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2-2x+1}$$

(2) $\frac{x^2-1}{x^2-25}\div\frac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5}=\frac{(x^2-1)(x^2+4x-5)}{(x^2-25)(x^2-4x-5)}$

$$=\frac{(x-1)(x+1)(x+5)(x-1)}{(x-5)(x+5)(x+1)(x-5)}$$

=

(ગુ.સા.અ. (x+1)(x+5 દૂર કરતાં)

=

$\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-10x+25}$ જે અતિસંક્ષિપ્તરૂપ છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 4.9

1. ગુણનફળ શોધો અને તેને અતિસંક્ષિપ્તરૂપમાં દર્શાવો.

(i) $\dfrac{7x+2}{2x^2+3x+1}\times\dfrac{x+1}{7x^2-5x-2}$ (ii)

(iii) $\dfrac{3x^2-15x+18}{2x-4}\times\dfrac{17x+3}{x^2-6x+9}$ (iv) $\dfrac{5x-3}{5x+2}\times\dfrac{x+2}{x+6}$

(v) (vi) $\dfrac{x^3+1}{x-1}\times\dfrac{x-1}{2x}$

(vii) $\dfrac{x-3}{x-4}\times\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-2x-3}$ (viii) $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}\times\dfrac{x^2-2x-24}{x^2-16}$

2. નીચેની પદાવલિઓમાંથી દરેક પદાવલીનો વ્યસ્ત શોધો.

(i) $\dfrac{x^2+2}{x-1}$ (ii) $-\dfrac{3a}{1-a}$

(iii) $-\dfrac{7}{1-2x-x^2}$ (iv) x^4+1

3. ભાગાકાર કરો અને પરિણામને સંમેય પદાવલિના અતિસંક્ષિપ્ત રૂપમાં દર્શાવો.

(i) $\dfrac{x^2+11x+18}{x^2-4x-117}\div\dfrac{x^2+7x+10}{x^2-12x-13}$ (ii) $\dfrac{6x^2+x-1}{2x^2-7x-15}\div\dfrac{4x^2+4x+1}{4x^2-9}$

(iii) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-9}\div\dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3}$ (iv) $\dfrac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}\div\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$

(v) $\dfrac{3x^2+14x-5}{x^2-3x+2} \div \dfrac{3x^2+2x-1}{3x^2-3x-2}$ (vi) $\dfrac{2x^2+x-3}{(x-1)^2} \div \dfrac{2x^2+5x+3}{x^2-1}$

સારાંશ

- *નીચે આપેલા વિશિષ્ટ ગુણનફળો બીજગણિતમાં વારંવાર જોવા મળે છે.*

  (i) $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ (ii) $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$

  (iii) $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$ (iv) $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

  (v) $(ax+b)(cx+d) = acx^2+(ad+bc)x+bd$

  (vi) $(x+y)^3 = x^3+3xy(x+y)+y^3$ (vii) $(x-y)^3 = x^3-3xy(x-y)-y^3$

  (viii) $(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3+y^3$ (ix) $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3-y^3$

- *બહુપદીનું અવયવીકરણ એ બહુપદીને બે કે તેથી વધારે બહુપદીઓના ગુણનફળ તરીકે દર્શાવવાની પ્રક્રિયા છે. (ગુણાકાર)*
- *ગુણનફળમાં દર્શાવેલી દરેક બહુપદીએ આપેલ બહુપદીનો અવયવ કહેવાય છે.*
- *જો કોઈ બહુપદીને બહુપદીઓના ગુણનફળ તરીકે દર્શાવી શકાતી હોય અને ગુણનફળમાં રહેલી દરેક બહુપદીને પોતાનો સિવાયને બીજા કોઈ અવયવ નહોય (એટલે કે તેના ફરીથી અવયવ પડતા ન હોય) અને સાંમયિક સહગુણકોમાં 1 અથવા -1 સિવાયનો બીજો કોઈ સામાન્ય અવયવ ન હોય તો તે પદાવલીનું સંપૂર્ણ અવયવીકરણ થયુ છે એમ કહેવાય.*
- *વિશિષ્ટ ગુણનફળમાં દર્શાવેલી રીતો પર આધાર રાખ્યા સિવાય પણ આપણે વિભાજનના ઉપનય પ્રમાણે કેટલાંક અથવ બધા પદોમાં સામાન્ય હોય તેવી એકપણને સામાન્ય લઈને (કાઢીને) અવયવીકરણ કરી શકીએ છીએ.*
- *બે અથવા બેથી વધારે આવેલી બહુપદીઓનો ગુ.સા.અ. સૌથી ઉંચી ઘાતવાળી બહુપદી અને આપેલ બહુપદીઓમાંની દરેક બહુપદીના સૌથી મોટા સાંખિક સહગુણકનું ગુણનફળ છે.*
- *બે અથવા બેથી વધારે આવેલી બહુપદીઓનો લ.સા.અ. સૌથી લઘુત્તમ ઘાતવાળી બહુપદી અને આપેલ બહુપદીઓમાંની દરેક બહુપદીના સૌથી ઓછી ઘાતવાળા સાંખિક સહગુણકો જે આપેલ બહુપદીઓમાંની દરેક બહુપદીના અનુરૂપ ઘટકોના અવયવી ગુણનફળ છે.*
- *બૈજિક પદાવલીને જો* $\dfrac{P}{Q}$ *સ્વરૂપમાં દર્શાવાય જ્યાં* p *અને* q *બહુપદીઓ છે (અને* q *એ શૂન્યેતર બહુપદી છે) તો તેને સંમેય પદાવલી કહેવાય.*
- *સંમેય સંખ્યાઓ પર જે રીતે પ્રક્રિયાઓ થાય છે તે જ રીતે સંમેય પદાવલી પર પ્રક્રિયાઓ થાય છે.*
- *બે સંમેય પદાવલીઓના (સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકારથી) પણ સંમેય પદાવલીઓ છે.*

- *સંમેય પદાવલીના અંશ અને છેદમાં જો સામાન્ય અવયવ હોય, તો તેને કાઢી લેવાની (રદ કરવાની) પ્રક્રિયાને સંમેય પદાવલીને અતિસંક્ષિપ્ત રૂપ દર્શાવવાની પ્રક્રિયા કહેવાય છે.*

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. *સાચા વિકલ્પની સામે -- ની નિશાની કરો.*

(i) જો $120^2 - 20^2 = 25p$, હોય, તો $p =$

(A) 16 (B) 140 (C) 560 (D) 14000

(ii) $(2a^2 + 3)^2 - (2a^2 - 3)^2 =$

(A) $24a^2$ (B) $24a^4$ (C) $72a^2$ (D) $72a^4$

(iii) $(a^2 + b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2 =$

(A) $2(a^2 + b^2)$ (B) $4(a^2 + b^2)$

(C) $4(a^4 + b^4)$ (D) $2(a^4 + b^4)$

(iv) જો $m - \frac{1}{m} = -\sqrt{3}$, તો $m^3 - \frac{1}{m^3} =$

(A) 0 (B) $6\sqrt{3}$ (C) $-6\sqrt{3}$ (D) $-3\sqrt{3}$

(v) $\frac{327 \times 327 - 323 \times 323}{327 + 323} =$

(A) 650 (B) 327 (C) 323 (D) 4

(vi) $8m^3 - n^3$ is =

(A) $(2m - n)(4m^2 - 2mn + n^2)$ (B) $(2m - n)(4m^2 + 2mn + n^2)$

(C) $(2m - n)(4m^2 - 4mn + n^2)$ (D) $(2m - n)(4m^2 + 4mn + n^2)$

(vii) =

(A) 66 (B) 198 (C) 1000 (D) 3000

(viii) $36a^5b^2$ અને $90a^3b^4$ તો ગુ.સા.અ. =

(A) $36a^3b^2$ (B) $18a^3b^2$

(C) $90a^3b^4$ (D) $180a^5b^4$

(ix) $x^2 - 1$ અને $x^2 - x - 2$ નો લ.સા.અ =

(A) $(x^2 - 1)(x - 2)$ (B) $(x^2 - 1)(x + 2)$

(C) $(x - 1)^2 (x + 2)$ (D) $(x + 1)^2 (x - 2)$

(x) નીચેનામાંથી કઈ સંમેય પદાવલી નથી ?

(A) (B) $x + \frac{1}{\sqrt{5x}}$

(C) $8\sqrt{x} + 6\sqrt{y}$ (D) $\frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}}$

2. નીચેના દરેકનું ગુણનફળ શોધો.

(i) $(a^m + a^n)(a^m - a^n)$ (ii) $(x + y + 2)(x - y + 2)$

(iii) $(2x + 3y)(2x + 3y)$ (iv) $(3a - 5b)(3a - 5b)$

(v) $(5x + 2y)(25x^2 - 10xy + 4y^2)$ (vi) $(2x - 5y)(4x^2 + 10xy + 25y^2)$

(vii) $\left(a + \frac{5}{4}\right)\left(a + \frac{4}{5}\right)$ (viii) $(2z^2 + 3)(2z^2 - 5)$

$\sqrt{33}$

(ix) $99 \times 99 \times 99$ (x) $103 \times 103 \times 103$

(xi) $(a + b - 5)(a + b - 6)$ (xii) $(2x + 7z)(2x + 5z)$

3. જો $x = a - b$ અને $y = b - c$, હોય તો સાબિત કરો કે,

$(a - c)(a + c - 2b) = x^2 - y^2$

4. જો $4x - 5z = 16$ અને $xz = 12$ હોય, તો $64x^3 - 125z^3$ ની કિંમત શોધો.

5. અવયવ પાડો :

(i) $x^7 y^6 + x^{22} y^{20}$ (ii) $3a^5 b - 243ab^5$

(iii) $3a^6 + 12a^4 b^2 + 12a^2 b^4$ (iv) $a^4 - 8a^2 b^3 + 16b^6$

(v) $3x^4 + 12y^4$ (vi) $x^8 + 14x^4 + 81$

(vii) $x^2 + 16x + 63$ (viii) $x^2 - 12x + 27$

(ix) $7x^2 + xy - 6y^2$ (x) $5x^2 - 8x - 4$

(xi) $x^6 - 729y^6$ (xii) $125a^6 + 64b^6$

6. ગુ.સા.અ. શોધો.

(i) $x^3 - x^5$ અને $x^4 - x^7$

(ii) $30(x^2 - 3x + 2)$ અને $50(x^2 - 2x + 1)$

7. *લ.સા.અ. શોધો.*

   (i) $x^3 + y^3$ અને $x^2 - y^2$

   (ii) $x^4 + x^2y^2 + y^4$ અને $x^2 + xy + y^2$

8. *નિશાની દ્વારા દર્શાવેલી પ્રક્રિયા કરો.*

   (i) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x+1}$

   (ii)

   (iii) $\dfrac{x-1}{x-2} \times \dfrac{3x+1}{x^2-4}$

   (iv)

9. *સાદુરૂપ આપો :* $\dfrac{2}{a-1} - \dfrac{2}{a+1} - \dfrac{4}{a^2+1} - \dfrac{8}{a^4+1}$

   [*સુચન :* $\dfrac{2}{a-1} - \dfrac{2}{a+1} = \dfrac{4}{a^2-1}$; *હવે બાકીના પદ વારફરતી મેરી આગળ વધો*]

10. *જો* $m = \dfrac{x+1}{x-1}$ *અને* $n = \dfrac{x-1}{x+1}$, *હોય, તો* $m^2 + n^2 - mn$ *ની કિંમત શોધો.*

તમારી પ્રગતિ ચકાશોના ઉત્તરો

4.1

1. (i) $25x^2 + 20xy + y^2$ (ii) $x^2 - 6x + 9$ (iii) $a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2$

   (iv) $4x^2 - 20xy + 5y^2$ (v) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{2}{3}x + 1$ (vi) $\dfrac{z^2}{4} - \dfrac{1}{3}z + \dfrac{1}{9}$

   (vii) $a^4 - 25$ (viii) $x^2y^2 - 1$ (ix) $x^2 + \dfrac{25}{12}x + 1$

(x) $\frac{4}{9}x^4 - \frac{25}{9}x^2 - 1$ (xi) $6x^2 + 13xy + 6y^2$ (xii) $21x^2 + 8xy - 5y^2$

2. (i) $40x^2$ (ii) $2a^6 + 18$ (iii) $2(a^2x^2 + b^2y^2)$ (iv) $32p^2q^2$

3. (i) 10404 (ii) 11664 (iii) 4761 (iv) 996004
(v) 6384 (vi) 22451 (vii) 89964 (viii) 249936
(ix) 11445 (x) 5621 (xi) 8930 (xii) 989028

4.2

1. (i) $27x^3 + 36x^2y + 36xy^2 + 64y^3$ (ii) $p^3 - 3p^2qr + 3pq^2r^2 - q^3r^3$

(iii) $a^3 + a^2b + \frac{ab^2}{3} + \frac{b^3}{27}$ (iv) $\frac{a^3}{27} - \frac{a^2b}{3} + ab^2 - b^3$

(v) $\frac{a^6}{8} + \frac{1}{2}a^4b^2 + \frac{2}{3}a^2b^4 + \frac{8}{27}b^6$ (vi) $\frac{a^6x^9}{27} - \frac{2}{3}a^4b^3x^6y^2 + 4a^2b^6x^3y^4 - 8b^9y^6$

2. (i) 512 (ii) 1728 (iii) 5832 (iv) 12167 (v) 148877
(vi) 110592 (vii) 357911 (viii) 328509 (ix) 912663 (x) 970299

3. (i) $8x^3 + y^3$ (ii) $x^3 - 8$ (iii) $x^3 + 1$
(iv) $8y^3 - 27z^6$ (v) $64x^3 + 27y^3$ (vi) $27x^3 - \frac{1}{343}y^3$

4. (i) 100 (ii) 1115

5. (i) 15616 (ii) $\frac{27027}{125}$

6. (i) $120x^2 + 250$ (ii) $1000y^3$ (iii) $19x^3 - 19y^3$ (iv) $-117x^3 - 126$

7. (i) 1000 (ii) 444

4.3

1. $5x(2y - 3z)$ 2. $abc\,(c - b)$
3. $3p(2p - 5q + 9)$ 4. $(b - c)\,(a^2 - b)$

5. $(4x - y)^2 (8ax - 2ay - b)$ 6. $x (x + y) (x^2 - xy + y^2)$

7. $25(2 + 5p) (2 - 5p)$ 8. $(1 + 16y^4) (1 + 4y^2) (1 + 2y) (1 - 2y)$

9. $(5x + 1) (1 - x)$ 10. $(a^2 + bc + ab + ac) (a^2 + bc - ab - ac)$

11. $(5x + 6y - 1) (5x - 6y - 1)$ 12. $(7x - y + 1)(7x - y - 1)$

13. $(m + 7)^2$ 14. $(2x - 1)^2$

15. $(6a + 5)^2$ 16. $(x^3 - 4)^2$

17. $(a^4 + 7a^2 + 1) (a^2 + 3a + 1)(a^2 - 3a + 1)$

18. $(2a^2 + 6ab + 9b^2)(2a^2 - 6ab + 9b^2)$

19. $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$

20. $(3a^2 + 5a +4)(3a^2 - 5a +4)$ 21. (i) 40 (ii) 57200

4.4

1. $(a + 6b) (a^2 - 6ab + 36b^2)$ 2. $(a - 7) (a^2 + 7a + 49)$

3. $(x + 4y)^3$ 4. $(2x - 3y)^3$

5. $(2x - 5y)^3$ 6. $(4k - 3)^3$

7. $(9x^2 - 2) (81x^4 + 18x^2 + 4)$ 8. $x^2 (1 + y^2) (1 - y^2 + y^4)$

9. $2a(2a^2 - 3b^2) (4a^2 + 6a^2b^2 + 9b^4)$ 10. $(3b - a - 1) (9b^2 + 3ab + 3b + a^2 + a +1)$

11. $(2a - 3b + 4c)(4a^2 + 9b^2 - 6ab -8ac + 12bc + 16 c^2$

12. $(4x - 2y +1)(16x^2 + 8xy - 4x + 4y^2 - 4y + 1)$

4.5

1. $(x + 3) (x + 8)$ 2. $(x - 6y) (x - 9y)$ 3. $(x + 3) (2x - 1)$

4. $2(x - 2y)(3x + y)$ 5. $(2x^2 + 1) (x + 1) (x -1)$ 6. $(x + 15y) (x - 2y)$

7. $(x + 2) (2x + 7)$ 8. $(2y - 3)(5y - 2)$ 9. $(x - 1) (2x + 1)$

10. $(12 - m) (m + 9)$ 11. $(2a - b - 6)(2a - b + 5)$ 12. $(9y - 7)(5x + y)$

4.6

1. (i) $3xy^2$ (ii) $12y^3x^5$ (iii) $(x + 1)^2$ (iv) $x + 2$ (v) $6(x + 2)$

(vi) $(x+5)^2$ (vii) $(2x-5)^2$ (viii) x^2-1 (ix) $x-y$ (x) $6(x-1)$

2. (i) $75x^3y^2$ (ii) $240x^3y^4$ (iii) $(x-1)(x+1)^3$

(iv) x^2+4x+4 (v) $72\,(x+2)^3\,(x^2-2x+4)$ (vi) $(x+1)^2(x+5)^3$

(vii) $(x-4)(x+4)^2(2x-5)^3$ (viii) x^4-1 (ix) $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)$

(x) $18(x-1)(x-2)(x-3)$

4.7

1. (i), (ii), (iii), (v), (vii) અને (viii)

4.8

1. (i) $\frac{2x^2}{x-2}$ (ii) $\frac{2x^2+2x-7}{x^2+x-6}$ (iii) $\frac{2x^2+2}{x^3-x^2-x+1}$

(iv) (v) $\frac{2x}{x+3}$ (vi) $\frac{2x^2+8}{x^2-4}$

$\frac{4x^2+5x+28}{x^3+4x^2-16x+64}$ $\frac{1}{2x^2-4x-1}$ (vii) $\frac{2x^3+3x^2-1}{x^3+2x^2+x+2}$ (viii) $\frac{5}{6x^2}$

2. (i) $\frac{x-6}{x^2-4}$ (ii) $\frac{8x}{4x^2-1}$ (iii) $\frac{x^2-1}{x}$

(iv) $\frac{2-x}{x^2-x}$ (v) $\frac{x^2+2}{x-4}$ (vi) $\frac{2x^3+1}{(x^2+2)^2}$

(vii) $\frac{x^2-15x+16}{2(x^3+3x^2-9x-27)}$ (viii) $\frac{1-x}{1+x}$

3. (i) 2 (ii) 6 (iii) 2 (iv) 110 (v) $8\sqrt{15}$

(vi) 115 (vii) 0 (viii) 18 (ix) ± 5 (x) 14

4.9

1. (i) (ii) $\frac{x^4+x^2+1}{x^6+x^4+x^2+1}$ (iii) $\frac{51x+9}{2x-6}$

(iv) (v) $\frac{x^3+x^2+x+1}{x^3-2x^2+2x-1}$ (vi) $\frac{x^3+1}{2x}$

(vii) $\frac{x-1}{x+1}$ (viii)

2. (i) (ii) (iii) (iv) $\frac{1}{x^4+1}$

3. (i) $\frac{x+1}{x+5}$ (ii) (iii) $\frac{1}{x+3}$

(iv) $\frac{x+6}{x+2}$ (v) (vi) 1

સત્રાંત સ્વાધ્યાયના જવાબો

1. (i) C (ii) A (iii) D (iv) A (v) D (vi) B (vii) C (viii) B (ix) A (x) C
2. (i) $a^{2m}-a^{2n}$ (ii) x^2-y^2+4x+4 (iii) $4x^2+12xy+9y^2$
   (iv) $9a^2-30ab+25b^2$ (v) $125x^3+8y^3$ (vi) $8x^3-125y^3$
   (vii) $a^2+\frac{41}{20}a+1$ (viii) $4z^4-4z^2-15$ (ix) 970299
   (x) 1092727 (xi) $a^2+2ab-11a+30$ (xii) $4x^2+24xz+35z^2$
4. 15616
5. (i) $x^7y^6(1+x^{15}y^{14})$ (ii) $3ab(a-3b)(a+3b)(a^2+9b^2)$
   (iii) $3a^2(a^2+2b^2)^2$ (iv) $(a^2-4b^3)^2$
   (v) $3(x^2+2xy+2y^2)$ (vi) $(x^4-2x^2+9)(x^4+2x^2+9)$
   (vii) $(x+9)(x+7)$ (viii) $(x-3)(x-9)$
   (ix) $(x+y)(7x-6y)$ (x) $(x-2)(5x+2)$
   (xi) $(x-3y)(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)(x^2+3xy+9y^2)$
   (xii) $(5a^2+4b^2)(25a^4-20a^2b^2+16b^4)$
6. (i) $x^3(1-x)$ (ii) $10(x-1)$
7. (i) $(x^2-y^2)(x^2-xy+y^2$ (ii) $x^4+x^2y^2+y^4$

8. (i) $\dfrac{2x^2+2}{x^3-x^2-x+1}$ (ii) $\dfrac{x+2}{x+3}$

(iii) $\dfrac{3x^2-2x-1}{x^3+2x^2-4x-8}$ (iv) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-10x+25}$

9. $\dfrac{16}{a^8-1}$

10. $\dfrac{x^4+14x^2+1}{x^4-2x^2+1}$