5

સુરેખ સમીકરણ

તમે ચલ અને અચલના પાયાના ખ્યાલો વિશે શીખી ગયા છો આ ઉપરાંત બૈજિક પ્રક્રિયાઓ, પદાવલી, બહુપદીઓ અને તેમના શૂન્યો વિશે પણ શીખી ગયા છો. ઘણી પરિસ્થિતિઓ ઓચિંતિ આપણી સામે આવે છે, જેવી કે કોઈ પણ સંખ્યાના બમણામાં 6 ઉમેરતા 20 થાય છે. આ સંખ્યા શોધવા આવતો સંખ્યા x ધારવી પડે છે અને જેના વડે આપણે સંખ્યા શોધી શકીએ તેવો સૂત્રાંત્મક સંબંધ સ્થાપિત કરીએ છીએ. આપણે એ જોઈશુ કે આ પ્રકારની સૂત્રાત્મક રચના આપણને જેમાં ચલ અને અચલ સંખ્યાઓ છે તેવા સમીકરણ તરફ દોરી જાય છે. આ પ્રકરણમાં તમે જેમાં એક ચલ અને બે ચલ છે તેવા સુરેખ સમીકરણ વિશે અભ્યાસ કરશો. તમે એક ચલ સુરેખ સમીકરણ કેવી રીતે બનાવવાં અને તેનો ઉકેલ બૈજિક રીતે કેવી રીતે શોધવો તે શીખશો. વળી તમે દ્વિચલ સુરેષ સમીકરણ આ લેખની મદદથી સાથે સાથે બૈજિક રીતે ઉકેલવાનું શીખશો.

હેતુઓ

આ પ્રકરણનો અભ્યાસ કર્યા પછી તમે

- આપેલ સમીકરણના સમૂહમાંથી સુરેખ સમીકરણને ઓળખી શકશો.
- સુરેખ સમીકરણના ઉદાહરણો આપી શકશો. (ટાંકી શકશો)
- સુરેખ સમીકરણ લખી શકશો અને તેના ઉકેલ આપી શકશો.
- દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણો બનાવી શકશો (લખી શકશો) અને તેનાં ઉદાહરણો આપી શકશો.
- દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો આલેખ દોરી શકશો.
- દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો ઉકેલ આપી શકશો.
- બે સુરેખ સમીકરણ (સુરેખ સમીકરણ યુગ્મ) ના ઉકેલની આલેખની તેમજ બૈજિક રીતે શોધી શકશો.
- વાસ્તવિક જીવનના કોયડાઓ એક ચલ કે દ્વિચલ સમીકરણ સ્વરૂપમાં રૂપાંતરિત કરી (ફેરવી) શકશો અને પછી તેનો ઉકેલ શોધી શકશો.

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

- ચલ અને અચલનો ખ્યાલ
- બૈજિક પદાવલી અને તેની પ્રક્રિયાઓ
- બહુપદીનો, તેના શૂન્યો અને બપદી પરની પ્રક્રિયાઓનો ખ્યાલ

5.1 સુરેખ સમીકરણ

તમે બૈજિક પદાવલી અને બહુપદીથી પરિચિત છો જ. બૈજિક પદાવલીનું મૂલ્ય તેમાં રહેલા ચલની કિંમત પર આધાર રાખે છે. વળી તમે એક ચલ બહુપદી અને તેમના ઘાત વિષે શીખી ગયા છો જે બહુપદીઓમાં ચલની સંખ્યા એક હોય અને ચલનો ઘાત પણ એક હોય તેવી બહુપદીને એક ચલ સુરેખ બહુપદી કહે છે. જ્યારે બે પદાવલીઓને બહાબરના ચિલથી જુદી પાડવામાં આવે તેને સમીકરણ કહે છે. આમ સમીકરણમાં હંમેશા બરાબર (=) નું ચિહ્ન હોય છે. ચિહ્ન જમણી બાજુ અને ડાબી બાજુની પદાવલીઓ સરખી છે એમ બતાવે છે દા.ત.

$3x + 2 = 14$ ...(1)

$2y - 3 = 3y + 4$ ...(2)

$Z^2 - 3z + 2 = 0$ ...(3)

$3x^2 + 2 = 1$ ...(4)

ઉપરના ઉદાહરણોમાં બરાબરનું ચિહ્ન (=) અને ચલોનો સમાવેશ થાય છે. તેથી તે બધા સમીકરણો છે. સમીકરણ (1) માં ડાબીબાજુ (ડા.બા.) $3x + 2$ અને જમણી બાજુ (જ.બા.) $= 14$ છે અને તેમાં અચળ પદ x છે. સમીકરણ (2) માં ડા.બા. $= 2y-3$ અને જ.બા. $= 3y+4$ અને ચલ y છે અને બંને એક ચલ સુરેખ બહુપદીઓ છે. સમીકરણ (3) અને (40 માં ડાબી બાજુ દ્વિઘાત બહુપદી છે અને જમણીબાજુ સંખ્યા છે (અચળ સંખ્યા છે.)

તમે જોઈ શકશો કે સમીકરણ (1) માં ડાબી બાજુ એક ખાત બહુપદી છે અને જમણી બાજુ (અચળ) સંખ્યા છે સમીકરણ (2) માં ડાબી અને જમણી બંને બાજુ સુરેખ બહુપદી છે અને સમીકરણ (3) અને (4) માં ડાબી બાજુ દ્વિઘાત બહુપદીઓ છે. (તેથી) સમીકરણ (10 અને (2) સુરેખ સમીકરણો છે અને સમીકરણ (3) (4) સુરેખ સમીકરણો નથી.

ટૂંકમાં સમીકરણ એ ચલની એક શરત છે. શરત એ છે કે બંને વિગતો એટલે કે ડા.બા. અને જ.બા. બંને સરખી હોવી જોઈએ. એ બંને વિગતો પૈકી કોઈપણ એકમાં ચલ હોય જ તેનું ધ્યાન રાખવું જોઈએ.

એ ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ કે સમીકરણ $3x-4 = 4x-6$ અને સમીકરણ $4t-6 = 3x-4$ એક જ છે. આમ ડાબી બાજુની વિગત અને જમણી બાજુની વિગતની અદલા બદલી કરીએ ત્યારે સમીકરણ તેજ રહે છે. આ ગુણધર્મનો ઉપયોગ સમીકરણોના ઉકેલ શોધવામાં વારંવાર ઉપયોગ થાય છે.

જે સમીકરણમાં બે ચલો કે જેમનો દરેકમાં ઘાતાંક એક હોય અને ચલોના ગુણાકારવાળું પદ ન હોય, તો તેને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ રહે છે. દા.ત.

$2x + 3y = 4$ અને $x-2y+2 = 3x+y-6$ એ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણો છે અને સમીકરણ $3x2+y=5$ એ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ નથી (અને તેનો ઘાત 2 છે) કારણ કે ચલ x નો ઘાત2 છે વળી સમીકરણ $xy + x = 5$ એ પણ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ નથી કારણ કે તેમાં xy નું પદ છે અને તે બે ચલ પદો x અને y નો ગુણાકાર છે.

એક ચલ સુરેખ સમીકરણનું સામાન્ય સ્વરૂપ (વ્યાપક સ્વરૂપ) $ax+b = 0$ કે જ્યાં $a \neq 0$ અને a અને b અચળ હોય. દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનું સામાન્ય સ્વરૂપ (વ્યાપ સ્વરૂપ) $ax + by + c = 0$ છે. જ્યાં a, b અને c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે. એવી રીતે કે a અને b માંથી ઓછામાં ઓછું એક શૂન્ય નથી. (ટૂંકમાં) a અને b એકી સાથે શૂન્ય ન હોય છે.

ઉદાહરણ 5.1: નીચેનામાંથી ક્યો સમીકરણો એક ચલ સુરેખ સમીકરણ છે ? તેમની ડા.બા. અને જ.બા. દર્શાવો.

(i) $2x + 5 = 8$

(ii) $3y - z = y + 5$

(iii) $x^2 - 2x = x + 3$

(iv) $3x - 7 = 2x + 3$

(v) $2 + 4 = 5 + 1$

ઉકેલ :

1. આ x નું સુરેખ સમીકરણ છે. કારણ કે x નો ઘાથાંક 1 છે. ડા.બા. $= 2x + 5$ અને જ.બા. $= 8$
2. આ એક ચલ સુરેખ સમીકરણ નથી કારણ કે તેમાં બે ચલ y અને z છે.
3. આ સુરેખ સમીકરણ નથી કારણ કે x નો મહત્તમ ઘાતાંક 2 છે. અહી ડા.બા. $= x^2 - 2x$ અને જ.બા. $= x + 3$ છે.
4. આ x નું સુરેખ સમીકરણ છે. કારણ કે સમીકરણની ડા.બા. અને જ.બા. બંને બાજુએ x નો ઘાતાંક 1 છે. ડા.બા. $= 3x - 7$ અને જ.બા. $= 2x + 3$
5. આ સુરેખ સમીકરણ નથી કારણ કે તેમાં એક પણ ચલ નથી. ડા.બા. $= 2 + 4$ અને જ.બા. $= 5 + 1$. છે.

ઉદાહરણ 5.2: નીચેનામાંથી ક્યાં સમીકરણો દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણો છે ?

(i) $2x + z = 5$

(ii) $3y - 2 = x + 3$

(iii) $3t + 6 = t - 1$

ઉકેલ :

1. આ x અને y નું દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ છે.

2. આ x અને y નું દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ છે.

3. આ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ નથી કારણ કે તેમાં માત્ર એક ચલ t છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 5.1

1. નીચેનામાંથી ક્યાં સમીકરણો એક ચલ સુરેખ સમીકરણો છે ?

   (i) $3x - 6 = 7$

   (ii) $2x - 1 = 3z + 2$

   (iii) $5 - 4 = 1$

   (iv) $y^2 = 2y - 1$

2. નીચેનામાંથી ક્યાં સમીકરણો દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણો છે ?

   (i) $3y - 5 = x + 2$

   (ii) $x^2 + y = 2y - 3$

   (iii) $x + 5 = 2x - 3$

5.2 એક ચલ સુરેખ સમીકરણની રચના

નીચેની પરિસ્થિતિને ધ્યાનમાં લો.

1. x માં 4 ઉમેરતા 11 થાય.

2. y ને 7 વડે ભાગતાં 2 મળે.

3. રીના પાસે કેટલાંક સફરજન છે. તેમાંથી તે 5 સફરજન તેની બહેનને આપે છે. જો તેની પાસે 3 સફરજન બાકી રહે તો તેની પાસે કેટલાં સફરજન હશે ?

4. દ્વિઅંકી સંખ્યાના એકમના અંક કરતાં દશકનો અંક બમણો છે. જો અંકોના સ્થાન અદલ બદલ કરવામાં આવે તો તેથી બનતી નવી સંખ્યા મૂળ સંખ્યા કરતાં 18 ઓછી થાય છે તો મૂળ સંખ્યા શોધો.

   1. માં સમીકરણ આ પ્રમાણે લખી શકાય. $x + 4 = 11$ તમે ચકાસણી કરી શકશો કે $x = 7$ એ આ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે. આમ $x = 7$ એ આ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

   2. માં $\frac{y}{7} = 2$ ના સમીકરણ છે. (અથવા $y = 14$ સમીકરણનો ઉકેલ છે.)

3. માં શોધવાના જથ્થા માટે તમે x ચલ ધારી શકો એટલે કે રીના પાસે x સફરજન છે તેમાંથી 5 સફરજન તેની બહેનને આપે છે તેથઈ તેની પાસે x - 5 સફરજન બાકી રહે. તેથી જરૂરી સમીકરણ $x - 5 = 3$ અથવા $x = 8$ સ્વરૂપે લખી શકાય.

4. માં એકમનો અંક x ધારો તેથી દશકનો અંક 2x થાય તેથી સંખ્યા $10(2x)+x = 20x + x = 21x$ થાય. જ્યારે અંકોની અદલા બદલી કરવામાં આવે ત્યારે દશકનો અંક x અને અકમનો અંક 2x બને છે. તેથી સંખ્યા $10(x)+2x = 12x$ થાય. જ્યારે મૂળ સંખ્યા નવી સંખ્યા કરતાં 18 વધારે છે તેથી

$21x - 12x = 18$ સમીકરણ બને છે.

$9x = 18$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો. 5.2

નીચેની પરિસ્થિતિઓમાં યોગ્ય ચલો સંખ્યાઓ પસંદ કરીને સુરેખ સમીકરણ બતાવો.

1. 15 માંથી કોઈ સંખ્યાના બમણા બાદ કરવાથી 7 મળે.
2. એક મોટરબોટ દર કિલોમીટરે 0.1 લીટર બળતણ (પેટ્રોલ) વાપરે રછે. એક દિવસે તેણે x કિલોમીટરની મુસાફરી કરી જો તેણે કુલ 10 લીટર (પેટ્રોલ) બળતણ વાપર્યુ હોય, તો x માં સમીકરણ બનાવો.
3. એક લંબચોરસની લંબાઈ તેની પહોળાઈ કરતાં બમણી છે. લંબચોરસની પરિમિત 96 મીટર છે. (લંબચોરસની પહોલાઈ માટે y ધારો)
4. 15 વર્ષ પછી સલમાની ઉંમર પોતાની હાલની ઉંમર કરતાં ચાર ગણી થશે. (સલામતી હાલની ઉંમર માટે t વર્ષ ધારો.)

5.3 એક ચલ સુરેખ સમીકરણનો ઉકેલ

ચાલો આપણે નીચેનાં એક ચલ સુરેખ સમીકરણ વિશે વિચારીએ

$$x - 3 = -2$$

અહીં ડા.બા. $= x - 3$ અને જ.બા. $= 2$ છે.

હવે આપણે x ની કેટલીક કિંમતો મૂકીને ડાબી અને જમણી બાજુનું મૂલ્યાંકન કરીએ.

x ની કિંમત	ડ.બા.	જ.મા.
0	-3	-2
1	-2	-2
3	0	-2
4	1	-2

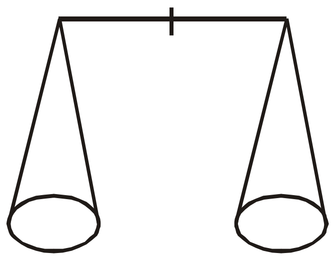
આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે જ્યારે x ની કિંમત 1 હોય ત્યારે જ ડા.બા. = જ.બા. બને છે. x ની તમામ અન્ય કિંમતો માટે ડા.બા # જ.બા. તેથી આપણે x ની કિંમત 1 હોય ત્યારે તે સમીકરણનું સમાધાન કરે છે એમ કહી એ અથવા x = 1 સમીકરણનો ઉકેલ છે.

સમીકરણમાં ચલના સ્થાને સંખ્યા મૂકતા ડા.બા. બરાબર જ.બા. બનાવે તેને તેનો ઉકેલ કહે છે. આ પ્રમાણે ચલની જુદી જુદી કિંમતો લાઈને પ્રયત્ન અને ભૂલ પદ્ધતિથી આપણે ઉકેલ મેળવી શકીએ તેમ છતાં આપણે સુરેખ સમીકરણનો ઉકેલ પદ્ધતિસર શોધવાનું શીખીશું.

સમીકરણને વજનકાંટા સાથે સરખાવી શકાય. તેની (સમીકરણની) બંને બાજુઓ તેનાં પલ્લાં છે. અને = નું ચિહ્ન બંને પલ્લાં સમતોલ છે એમ બતાવે છે. આપણે વજન કાંટાને કામ કરતો જોયો છે. જો આપણે બંને પલ્લામાં સરખું વજન મૂકીએ (ઉમેરીએ) અથવા બંને પલ્લામાંથી સરખું વજન કાઢી લઈએ (બાદ કરીએ) તો બંને પલ્લા સમતોલ રહે છે આ રીતને જ આપણે નીચેની રીતે સમીકરણમાં રૂપાંતર કરી શકીએ.

1. *સમીકરણની બંને બાજુ સરખી સંખ્યા ઉમેરો.*
2. *સમીકરણની બંને બાજુએથી સરખી સંખ્યા બાદ કરો.*
3. *સમીકરણની બંને બાજુઓને શૂન્ય સિવાયની સરખી સંખ્યા વડે ગુણો*
4. *સમીકરણની બંને બાજુઓને શૂન્ય સિવાયની સરખી સંખ્યા વડે ભાગો*

હવે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.



આકૃતિ **5.1**

ઉદાહરણ 5.3 : $5 + x = 8$ *નો ઉકેલ મેળવો.*

ઉકેલ : *સમીકરણની બંને બાજુમાંથી 5 બાદ કરીએ તો*

$$5 + x - 5 = 8 - 5$$

$$x + 0 = 3$$

$$x = 3$$

તેથી, $x = 3$ *સમીકરણનો ઉકેલ છે.*

ચકાસો : *જ્યારે* $x = 3$ *મૂકીએ ત્યારે ડા.બા.* $= 5 + 3 = 5 + 3 = 8$

અને જ.બા. $=8$ છે.

ડા.બા. $=$ જ.બા.

ઉદાહરણ 5.4 : $y-2=7$ નો ઉકેલ મેળવો.

ઉકેલ : સમીકરણની બંને બાજુ 2 ઉમેરતા આપણને

$y-2+2=7+2$ મળે.

$y=9$

તેથી $y=9$ એ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

ચકાસો : $y=9$, લેતાં ડા.બા. $=9-2=7$ અને જ.બા. $=7$ છે.

ડા.બા. $=$ જ.બા.

ઉદાહરણ 5.5: $7x+2=8$ નો ઉકેલ મેળવો.

ઉકેલ : સમીકરણની બંને બાજુ 2 બાદ કરતાં

$7x+2-2=8-2$ મળે.

$7x=6$

$\frac{7x}{7}=\frac{6}{7}$ (બંને બાજુ 7 વડે ભાગતાં)

$x=\frac{6}{7}$

તેથી, $x=\frac{6}{7}$ એ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 5.6 : $\frac{3y}{2}-3=9$ નો ઉકેલ મેળવો.

ઉકેલ : સમીકરણની બંને બાજુ 3 ઉમેરતા

$\frac{3y}{2}-3+3=9+3$

$\frac{3y}{2}=12$

$\frac{3y}{2}\times 2=12\times 2$ (બંને બાજુ 2 વડે ગુણવતાં)

$3y=24$

(બંને બાજુ 3 વડે ભાગતાં)

$y = 8$

$\frac{3y}{3} = \frac{24}{3}$ તેથી 8 એ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 5.7 : $(x + 3) = 3(2x - 7)$ નો ઉકેલ મેળવો.

ઉકેલ : આ સમીકરણને નીચે પ્રેમાણે લખી શકાય.

$2x + 6 = 6x - 21$

$6x - 21 = 2x + 6$ (ડા.બા. અને જ.બા.ની અદલા બદલી કરતાં)

$6x - 21 + 21 = 2x + 6 + 21$ (બંને બાજુ 21 ઉમેરતાં)

$6x = 2x + 27$

$6x - 2x = 2x + 27 - 2x$ (બંને બાજુ 2x વડે ભાગતાં)

$4x = 27$

$x = \frac{27}{4}$

તેથી, $x = \frac{27}{4}$ એ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

નોંધ :

1. આપણે દરેક વખતે જે ઉમેરીએ, બાદ કરીએ, ગુણીએ કે ભાગીએ તેને વિગતવાર લખવાની જરૂર નથી.

2. આ પ્રક્રિયાને ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ અથવા જમણી બાજુથી ડાબી બાજુ સ્થાન પરિવર્તન (પક્ષાંતર) કરવાની રીત કહેવાય છે.

3. જ્યારે આપણે કોઈ પદને એક બાજુથી બીજી બાજુ સ્થાન પરિવર્તન (પક્ષાંતર) કરીએ ત્યારે ચિહ્ન બદલાય છે. નિશાની '+' (વત્તા) એ '-' (ઓછા) નિશાની બને છે. અને '-' એ '+' થાય છે. (નિશાની 'x' (ગુણ્યા) એ ÷ (ભાગ્યા) થાય છે અને નિશાની ÷ એ 'x' થાય છે.)

4. એક ચલ સુરેખ સમીકરણને $ax + b = 0$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય છે. જ્યાં a અને b બં અચળ છે. અને x એ ચલ રહે તેનો ઉકેલ $x = -\frac{b}{a},\ a \neq 0$.

ઉદાહરણ 5.8 : $3x - 5 = x + 3$ નો ઉકેલ શોધો.

ઉકેલ :

$3x - 5 = x + 3$

$3x = x + 3 + 5$

$3x - x = 8$

$2x = 8$

$x = 4$

આમ, $x = 4$ એ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 5.3

નીચેના સમીકરણોના ઉકેલ મેળવો

1. $x - 5 = 8$
2. $19 = 7 + y$
3. $3z + 4 = 5z + 4$
4. $\frac{1}{3}y + 9 = 12$
5. $5(x - 3) = x + 5$

5.4 વ્યવહારિક કોયડાઓ (કૂટ પ્રશ્નો)

તમે એક ચલ સુરેખ સમીકરણ કેવી રીતે રચવું તે શીખી ગયા છો. હવે આપણે સુરેખ સમીકરણના કેટલાક ઉપયોગ વિશે શીખીશું.

ઉદાહરણ 5.9 : જેકોબના પિતાની હાલની ઉંમર જેકોબાના હાલની ઉંમર કરતાં ત્રણ ગણી છે 5 વર્ષ પછી તેમની ઉંમરનો તફાવત 30 વર્ષ થશે તો તેમની હાલની ઉંમર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે જકેબની હાલની ઉંમર x વર્ષ છે.

તેથી તેના પિતાની હાલની ઉંમર 3x વર્ષ હોય

5 વર્ષ પછી જેકોબની ઉમર $= (x + 5)$ વર્ષ અને

તેના પિતાની 5 વર્ષ પછી ઉંમર $= (3x + 5)$ વર્ષ હશે.

તેમની ઉંમરનો તફાવત $= (3x + 5) - (x + 5)$ વર્ષ જે 30 વર્ષ આવેલો છે, તેથી

$3x + 5 - (x + 5) = 30$

$3x + 5 - x - 5 = 30$

$3x - x = 30$

$2x = 30$

$x = 15$

જેકોબની હાલની ઉંમર 15 વર્ષ છે અને તેના પિતાની હાલની ઉંમર = 3x = 3 x 15 = 45 વર્ષ છે.

ચકાસો : પાંચ વર્ષ પછી જેકોબની ઉંમર = 15 + 5 = 20 વર્ષ

પાંચ વર્ષ પછી તેના પિતાની ઉંમર = 45 + 5 = 50 વર્ષ

તેમની ઉંમરનો તફાવત = 50 − 20 = 30 વર્ષ

ઉદાહરણ 5.10 : ત્રણ ક્રમિક બેકી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો સરવાળો 36 છે. તો તે સંખ્યાઓ શોધો

ઉકેલ : ધારો કે સૌથી નાની પેકી પૂર્ણાંક સંખ્યા x છે.

તેથી બીજી બે પેકી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ x + 2 અને x + 4 છે.

તેમનો સરવાળો 36 થાય છે.

$$x + (x + 2) + (x + 4) = 36$$

$$3x + 6 = 36$$

$$3x = 36 - 6 = 30$$

$$x = 10$$

તેથી માગેલી પૂર્ણાંક બેકી સંખ્યાઓ 10, 12 અને 14 છે.

ઉદાહરણ 5.11: એક લંબચોરસની લંબાઈ તેની પહોળાઈ કરતાં 3 સેમી વધારે છે જો તેની પરિમિત 34 સેમી હોય, તો તેની લંબાઈ પહોળાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે લંબચોરસની પહોળાઈ x સેમી છે.

તેની લંબાઈ = (x + 3) સેમી

તેની પરિમિત 34 સેમી હોવાથી

$$2(x + 3 + x) = 34$$

$$2x + 6 + 2x = 34$$

$$4x = 34 - 6$$

$$4x = 28$$

$$x = 7$$

તેથી લંબચોરસની પહોળાઈ 7 સેમી અને લંબાઈ 10 સેમી.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 5.4

1. બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 85 છે. જો એક સંખ્યા બીજી સંખ્યા કરતાં 7 વધારો હોય, તો બંને સંખ્યાઓ શોધો.
2. પિતાની ઉંમર તેના પુત્રની ઉંમરના 2 ગણા કરતાં 20 વધારે છે. તેમની ઉંમરનો સરવાળો 65 વર્ષ હોય, તો પુત્ર અને પિતાની ઉંમર શોધો.
3. લંબચોરસની લંબાઈ તેની પહોળાઈ કરતાં બમણી છે. લંબચોરસની પરિમિત 66 સેમી છે, તો તેની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો.
4. એક વર્ગમાં છોકરાઓની સંખ્યા છોકરીઓની સંખ્યાના $\frac{2}{5}$ ભાગની છે. જો છોકરાઓની સંખ્યા 10 હોય, તો છોકરીઓની સંખ્યા શોધો.

5.5 દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ

નેહા પેન્સીલ અને પેન ખરીદવા બજારમાં જાય છે. પેન્સીલની કિંમત 2 રૂપિયા અને પેનની કિંમત 5 રૂપિયા છે. જો નેહા રૂા. 50 નો ખર્ચ કરે તો તેણે કેટલી પેન્સીલ અને પેન ખરીદી હશે ?

આપણે પેન્સીલ અને પેનની સંખ્યા શોધવા માગીએ છીએ તો તેણે ખરીદેલી પેન્સીલ માટે x અને પેન માટે y ધારો

ખરીદેલી પેન્સીલની કિંમત = 2 x x = રૂા. 2x

અને y પેનની કિંમત = 4 x y રૂા. 4y

કુલ કિંમત રૂા. 50 છે.

$2x + 4y = 50$ ...(1)

આ x અને y સ્વરૂપનું દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ છે. કારણ કે તે $ax + by + c = 0$ સ્વરૂપનું છે.

હવે આપણે સમીકરણ (1) નો ઉકેલ શોધવા માટે x અને y ની જુદી જુદી કિંમતો લઈશું.

1. જો $x = 1, y = 12$, હોય તો, ડા.બા. $= 2 \times 1 + 4 \times 12 = 2 + 48 = 50$ અને જ.બા. = 50. છે, $x = 1$ અને $y = 12$ નું સમીકરણનો ઉકેલ છે.
2. જો $x = 3, y = 11$, હોય, તો ડા.બા. $= 2 \times 3 + 4 \times 11 = 50$ અને જ.બા. = 50.

   $x = 3, y = 11$ સમીકરણનો ઉકેલ છે.
3. જો $x = 4, y = 10$, હોય, તો ડા.બા. $= 9 \times 4 + 4 \times 10 = 48$ અને જ.બા. = 50. છે. તેથી $x = 4, y = 10$ એ સમીકરણનો ઉકેલ નથી.

આમ, દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણને એક કરતાં વધારે ઉકેલ હોય છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે (જોયુ કે) ચલ x ના સંદર્ભમાં એક ચલ સુરેખ સમીકરણનું વ્યાપક સ્વરૂપ $ax + b = 0, a \neq 0$ તેને એક જ ઉકેલ હોય છે એટલે કે $x = -\frac{b}{a}$ પણ x અને y ના સંદર્ભમાં દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનું વ્યાપક સ્વરૂપ $ax + by + c = 0$ .... (1)

જ્યા a, b અને c અચળ છે અને a અને b માંથી ઓછામાં ઓછું એક તો શૂન્ય ન જ હોય $a \neq 0$ તેમ લઈએ તો સમીકરણ (1) ને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય.

$$ax = -by - c$$

$$x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$$

હવે y ની દરેક કિંમત માટે આપણને x ની અતન્ય સંખ્યા મળે આમ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણને અસંખ્ય મળે.

નોંધ : સુરેખ સમીકરણ $ax + c = 0$ જ્યાં $a \neq 0$ ને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ $ax + oy + c = 0$ ના સ્વરૂપમાં વિચારી શકાય, એટલે કે y નો સહગુણ 30 લેતાં તેના અનેક ઉકેલ મળી શકે,

$$x = -\frac{c}{a}, y = 0; \ x = -\frac{c}{a}, y = 1$$

એટલે કે y ની દરેક કિંમત માટે x ની કિંમત $-\frac{c}{a}$. બરાબર થાય

ઉદાહરણ 5.12: બે સંખ્યાનો સરવાળો 15 થાય છે આ વિગતને ધ્યાનમાં લઈ દ્વિચલ સુરેખ સુરેખ સમીકરણની રચના કરો.

ઉકેલ : ધારો કે બે સંખ્યાઓ x અને y છે. તેથી તેમનો સરવાળો $x + y$ થાય. તેમનો સરવાળો 15 આપેલો છે તેથી જરૂરી સમીકરણ $x + y = 15$.

ઉદાહરણ 5.13 : સમીકરણ $4x - 5y = 2$ ના ઉકેલ (i) $x = 3$ અને $y = 2$ (ii) $x = 4$ અને $y = 1$ છે કે કેમ તે ચકાસો.

ઉકેલ : $4x - 5y = 2$ આપેલ છે.

જ્યારે $x = 3$ અને $y = 2$ હોય ત્યારે ડા.બા.

$= 4x - 5y$

$= 4 \times 3 - 5 \times 2$

$= 12 - 10 = 2 =$ જ.બા.

તેથી $x = 3$ અને $y = 2$ એ સમીકરણનો ઉકેલ છે. જ્યારે $x = 4$ અને $y = 1$ હોય, ત્યારે ડા.બા.

$= 4x - 5y$

$= 4 \times 4 - 5 \times 1$

$= 16 - 5$

$= 11$

પરંતુ જ.બા. = 2 છે.

ડા.બા. ≠ જ.બા.

તેથી x = 4 અને x = 1 સમીકરણનો ઉકેલ નથી.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 5.5

1. અજ્ઞાન સંખ્યાઓ માટે યોગ્ય ચલો પસંદ કરી દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ બનાવો.
   (i) લંબચોરસની પરિમિતિ 98 સેમી છે. (લંબાઈ માટે x અને પહોળાઈ માટે y લો.)
   (ii) પિતાની ઉંમર પુત્રની ઉંરના બમણા કરતાં 10 વધારે છે.
   (iii) એક સંખ્યા કરતાં બીજા સંખ્યા 10 વધારે રહે.
   (iv) 2 કિગ્રા. સફરજન અને ત્રણ કિગ્રા. નારંગીની કિંમત રૂા. 120 છે. (સફરજન અને નારંગીની 1 કિગ્રાની કિંમત પેટે અનુક્રમે x અને y ધારો)

નીચેના વિધાનો સાંચા છે કે ખોટાં તે કહો.

2. x = 0, y = 3 એ $3x + 2y - 6 = 0$ સમીકરણનો ઉકેલ છે.
3. x = 2, y = 5 એ $5x + 2y = 10$ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

5.6 દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો આલેખ

હવે તમે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો આલેખ દોરતાં શીખશો. $2x + 3y = 12$. સમીકરણને નીચે મુજબ લખી શકાય.

$2x = 12 - 3y$ અથવા $3y = 12 - 2x$

$$x = \frac{12 - 3y}{2} \text{ or } y = \frac{12 - 2x}{3}$$

y ની દરેક કિંમત માટે અથવા x ની દરેક કિંમત માટે આપણને અનુક્રમે x અને y ની અનન્ય કિંમત મળે છે. x અને y ની જે કિંમતો સમીકરણનું સમાધાન કરે છે તેનું નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક બતાવીએ.

$2x + 3y = 12$

x	0	6	3	9	– 3
y	4	0	2	– 2	6

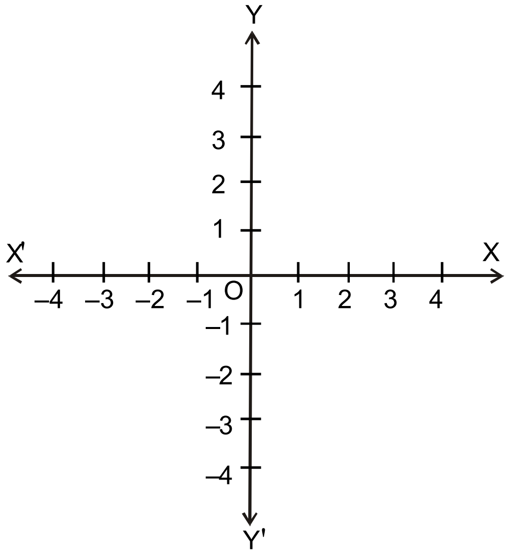
આમ, $x = 0, y = 4; x = 6, y = 0; x = 3, y = 2; x = 9, y = –2; x = –3, y = 6$ આ બધા આપેલ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

આ ઉકેલોને આપણે ક્રમયુક્ત જોડમાં દર્શાવીએ (0, 4), (6, 0), (3, 2), (9, −2) અને (−3, 6).

પ્રથમ અંક x નું મૂલ્ય અને y નું મૂલ્ય દર્શાવે છે. હવે આ ક્રમયુક્ત જોડોને સમતલમાં નિરૂપણ કરી તેમને જોડીને સમીકરણનો આલેખ દોરતાં શીખશો, સમીકરણ $2x + 3y = 12$ ના આલેખમાં જે બિંદુઓ ઉકેલ દર્શાવે રછે તે બિંદુઓ સમરેખ હશે (તેઓ એક રેખા પર હશે) અને જે બિંદુઓ ઉકેલ દર્શાવતા નથી તેઓ આ રેખાપર નહી હોય, દરેક બિંદુ ક્રમયુક્ત જોડ કહેવાય છે જે રેખા પર છે અને (સમીકરણનો) ઉકેલ આપશે. અને જે ક્રમયુક્ત જોડી રેખા પર નથી તે સમીકરણનો ઉકેલ બની શકશે નહિ. (તે સમીકરણનો ઉકેલ નહીં હોય.)

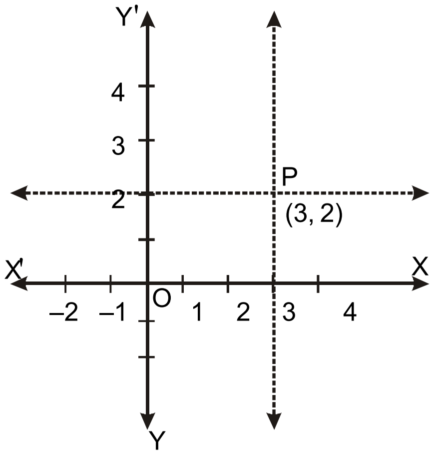
દ્વિચલ સમીકરણનો આલેખ દોરવા માટે આપણે પ્રથમ આ બિંદુઓનું સમતલમાં નિરૂપણ કરીશું, આપણે નીચે પ્રમાણે પ્રક્રિયા કરીશ:

પગલુ 1: આપણે પરસ્પર O બિંદુમાં છેદતી X'OX અને Y'OY બે લંબરેખાઓ દોરીએ. આકૃતિ 5.2માં દર્શાવ્યા મુજબ સંખ્યારેખા પર O બિંદુને સંગત રેખા 0 (શૂન્ય) ને ધ્યાનમાં લઈને X'OX અને YOY' ઉપર વાસ્તવિક સંખ્યાઓનું નિરૂપણ કરો. આ બે રેખાઓ સમતલનું ચાર ભાગમાં વિભાજન કરે છે જેને પ્રથમ ચરણ, દ્વિતીય ચરણ, તૃતીય ચરણ અને ચતુર્થ ચરણ કહેવાય છે. રેખા X'OX એ X અક્ષ અને Y'OY ને Y અક્ષ કહેવાય છે. આપણે સમતલમાં X અક્ષ અને Y અક્ષ એકબીજાને લંબ દોરેલા છે. તેથી સમતલને યામ સમતલ અથવા ફ્રેન્ચ ગણિતશાસ્ત્રી દફાર્તે કે જેણે બિદુંઓને સમતલમાં નિરૂપણ કરવાની આ રીત શોધી તેના માનમાં કાર્ઝિયન સમતલ કહીશ



આકૃતિ **5.2**

પગલુ 2: (3,2) નું નિરૂપણ કરવા માટે X ધરી પર 3 ઉપર ટપકું કરો અને આ બિંદુમાંથી X અક્ષને લંબરેખા 'l' દોરો (એટલે Y અક્ષને સમાન્તર) હવે Y ધરી પર 2 આગળ ટપકું કરો અને આ બિંદુમાંથી Y અક્ષને લંબરેખા m દોરો (એટલે કે X અક્ષને સમાન્તર) જે રેખા l ને P બિંદુમાં મળે બિંદુ P એ સમતલમાં બિંદુ (3, 2) દર્શાવે છે. (P ને (3, 2) ને સંગત સમતલનું બિંદુ કહે છે.)



આકૃતિ - 5.3

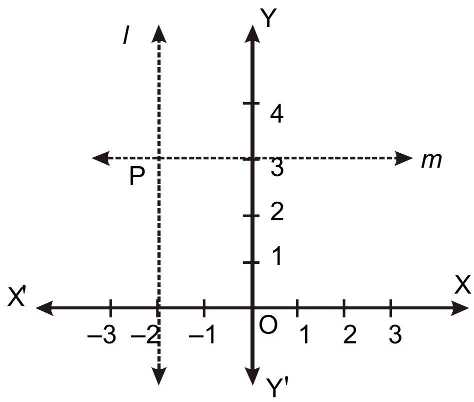
નોંધ 1: *આપણે એ ધ્યાનમાં રાખવુ જોઈએ કે ક્રમયુક્ત જોડ (a, b) માટે a ને બિંદુનો x યામ અને b ને બિંદુનો y યામ કહેવાય છે.*

નોંધ 2: *X અક્ષ પરના દરેક બિંદુને (a, o) વડે દર્શાવી શકીએ એટલે કે તેનો y યામ 0 (શૂન્ય) છે અને y અક્ષ પરનું દરેક બિંદુ (o, b) સ્વરૂપમાં છે એટલે કે તેનો y યામ 0 (શૂન્ય) છે 'O' બિંદુના યામ (0, 0) છે.*

નોંધ 3: *પ્રથમ ચરણમાં x અને y બંને યામ ઘન હોય છે. બીજા ચરણમાં x યામ ઋણ અને y યામ ધન હોયક છે, ત્રીજા ચરણમાં x અને y બંને યામ ઋણ હોય છે અને ચોથા ચરણમાં x યામ ધન અને y યામ ઋણ હોય છે.*

ઉદાહરણ 5.14 : *યામ સમતલમાં (-2, 3) બિંદુનું નિરૂપણ કરો.*

ઉકેલ : *સમતલમાં x અક્ષ અને y અક્ષ દોરો અને તેમના પર બિંદુઓ આલેખો x અક્ષ પર જે બિંદુને સંગત સંખ્યા -2 છે તે લો અને તેમાંથી x અક્ષને સમાંતર રેખા 'l' દોરો. y અક્ષ પર જે બિંદુને સંગત સંખ્યા 3 છે તે લો અને તમાંથી x અક્ષ ને સમંતર રેખા m દોરો જે l ને P બિંદુઓ મળે બિંદુ P એ (-2, 3) દર્શાવે છે. આપણે (-2, 3) ને બિંદુના યામ કહીએ છીએ.*



આકૃતિ **5.4**

હવે તમે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો આલેખ દોરતા શીખશે. આપણે એ ધ્યાનમાં લેવુ જોઈએ કે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો આલેખ એક રેખા છે, અને રેખા પરના દરેક બિંદુના યામ સમીકરણનું સમાધાન કરે રછે. જો બિંદુ રેખા પર ન હોય તો તેના યામ સમીકરણનું સમાધાન કરશે નહિ, વલી તમે એ પણ જાણો છો કે આપેલા બે બિંદુમાંથી એક અને માત્ર એક જ રેખા દોરી શકાય છે. તેથી કોઈપણ બે બિંદુ લેવાં પૂરતાં રછે એટલે કે x અને y ચલનાં મૂલ્યો જે સમીકરણનું સમાધાન કરે છે તેને સંગત બે બિંદુઓ લઈએ તો તે પૂરતું છે. તેમ છતાં

એવું સૂચન કરવામાં આવે છે કે ભૂલ થવાથી કોઈ પણ તડને ટાળવા તમારે ત્રણ બિંદુ લેવા જોઈએ.

ઉદાહરણ 5.15 : $2x - 3y = 6$ સમીકરણનો આલેખ દોરો.

ઉકેલ : હવે સમીકરણ $2x - 3y = 6$ નું સમાધાન કરે તેવાં x અને y નાં મૂલ્યો નક્કી કરો. નીચેનામાંથી કોઈ પણ સ્વરૂપ સમીકરણનું પક્ષાતર કરવાથી સરળતા થશે.

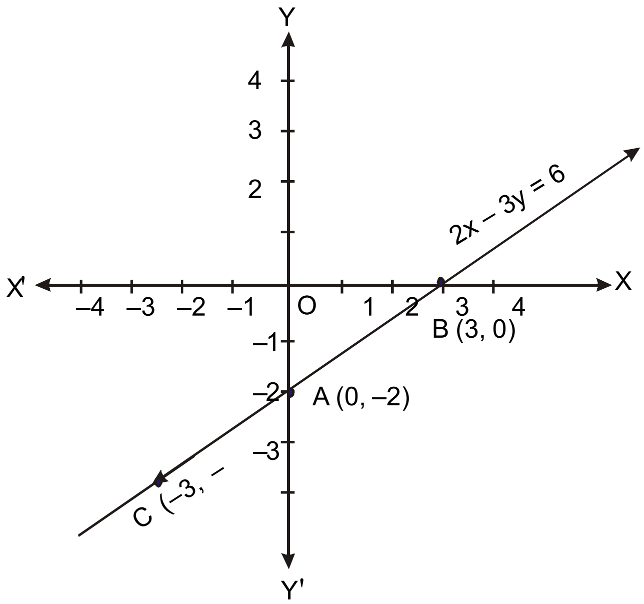
$2x = 3y + 6$ અથવા $3y = 2x - 6$

$$\Rightarrow x = \frac{3y+6}{2} \text{ or } y = \frac{2x-6}{3}$$

હવે x અને y ની જુદી જુદી કિંમતો પસંદ કરો તો તેમને અનુરૂપ y અને x નાં મૂલ્યો તમને મળશે જો આપણે x ની જુદી જુદી કિંમતો $y = \frac{2x-6}{3}$ માં લઈએ (નહીએ) તો y ને અનુરૂપ મૂલ્યો મળશે $x = 0$ માટે $y = -2$ માટે $x = 3$ અને $y = 0$ માટે $x = -3$ અને $y = -4$ મળો. તમે આ મૂલ્યોને નીચે મુજબ કોષ્ટક સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકશો.

x	0	3	–3
y	– 2	0	– 4

સમતલમાં અનુરૂપ બિંદુઓ $(0, -2)$, $(3, 0)$ અને $(-3, -4)$ છે હવે તમે આ બિંદુઓને નિરૂપણ કરો અને આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે રેખા દોરો જે સુરેખ સમીકરણને આલેખ દર્શાવે એ નોંધો કે ત્રણે બિંદુ એક રેખાપર હોવા જોઈએ.



આકૃતિ - 5.5

ઉદાહરણ 5.16: x = 3 નો આલેખ દોરો.

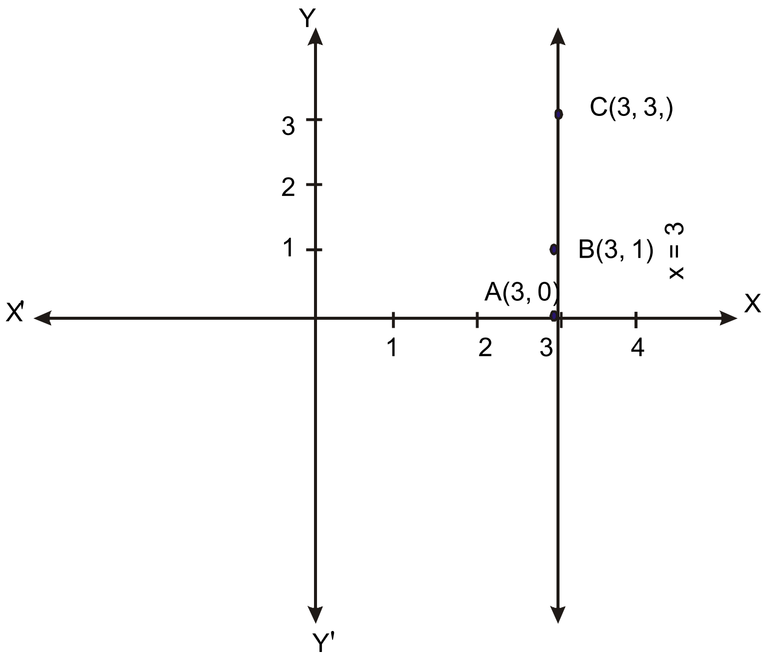
ઉકેલ : એમ જણાય છે કે આ એક ચલ સુરેખ સમીકરણ છે, તમે તેને નીચે પ્રમાણે લખીને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણમાં સરળતાથી ફેરવી શકશો.

$$x + 0\,y = 3$$

હવે તમારે x અને y ની કિંમત દર્શાવતું કોષ્ટક નીચે પ્રમાણે મળશે.

x	3	3	3
y	3	0	1

નિરીક્ષણ કરો કે y ની કોઈપણ કિંમત માટે x નું મૂલ્ય હંમેશાં 3 છે આમ જરૂરી બિંદુઓ (3, 3), (3, 0), (3, 1) લઈ શકાય આલેખ આકૃતિ 5.6માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ - 5.6

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 5.6

1. નીચેના બિંદુઓનું કાર્ટેઝિયન સમતલમાં (યામ) સમતલમાં નિરૂપણ કરો.

(i) (3, 4) (ii) (–3, –2) (iii) (–2, 1)

(iv) (2, –3) (v) (4, 0) (vi) (0, –3)

2. *નીચેના દરેક દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો આલેખ દોરો.*

(i) $x + y = 5$ (ii) $3x + 2y = 6$

(iii) $2x + y = 6$ (iv) $5x + 3y = 4$

5.7 દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ સંહતિ (યુગમ)

નેહા બજારમાં જાય છે અને તે બે પેન્સીલ અને ત્રણ પેન રૂા. 19 માં ખરીદે છે. મેરી ત્રણ પેન્સીલ અને બે પેન રૂા. 16માં ખરીદે છે તો એક પેન્સીલ અને એક પેનની કિંમત શું હશે ? જો એક પેન્સીલની કિંમત રૂા. x અને એક પેનની કિંમત રૂા. y હોય, તો નેહાના સંદર્ભણાં સુરેખ સમીકરણ $2x + 3y = 19$ અને મેરીના સંદર્ભમાં $3x + 2y = 11$ થાય હવે એક પેન્સીલ અને એક પેનની કિંમત શોધવી હોય, તો તમારે x અને y નો એવાં મૂલ્યો શોધવા જોઈ કે જે બંને સમીકરમનું સમાધન કરે, એટલે કે,

$$2x + 3y = 19$$

$$3x + 2y = 16$$

આ બંને સમીકરણોને સાથે દર્શાવવાની ક્રિયાને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ સંહતિ (સુરેખ સમીકરણ યુગ્મ) કહેવાય છે, અને x અને y ની જે કિંમતો બંને સમીકરણોનું એક સાથે સમાધાન કરે તેને સમીકરણનો ઉકેલ કહે છે.

આવા સમીકરણોના ઉકેલ શોધવાની જુદી જુદી રીતો છે (1) આલેખની રીત (2) બૈજિક રીત તમે આવા સમીકરણોના ઉકેલની પ્રથમ આલેખની રીત અને પછી બૈજિક રીત શીખશો.

5.7.1 આલેખની રીત :

આ પદ્ધતિમાં તમારે બંને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના આલેકો એક જ આલેખપત્ર ઉપર દોરવા પડશે. સમીકરણોમાં આલેખો નીચે પ્રમાણે હોઈ શકે.

1. **પરસ્પર છેદતી રેખાઓ :** *આ બાબતમાં છેદબિંદુ બંને સમીકરણોનું એક સાથે ઉકેલ બનશે. x યામ x ની અને y યામ y ની કિંમત આવશે. આ બાબતમાં સમીકરણ યુગ્મને અનન્ય ઉકેલ મળશે.*

2. **એક જ રેખાઓ :** *આ બાબતમાં સામાન્ય રેખા પરનું દરેક બિંદુ (સમીકરણ યુગ્મનો) ઉકેલ આપશે તેથી સમીકરણથી આ પદ્ધતિમાં સમીકરણ યુગ્મના ઉકેલો અનંત મળશે (અસંખ્ય ઉકેલ મળશે)*

3. **સમાંતર રેખાઓ :** *આ બાબતમાં બંને સમીકરણોમાં એક પણ બિંદુ સામાન્ય નહી હોય તેથી સમીકરણ યુગ્મને એક પણ ઉકેલ નહીં હોય.*

ઉદાહરણ 5.17 : *નીચેના સમીકરણ યુગ્મનો ઉકેલ શોધો.*

$$x - 2y = 0 \qquad ...(1)$$

$$3x + 4y = 20 \qquad ...(2)$$

ઉકેલ : ચાલો આપણે આ સમીકરણોના આલેખ દોરીએ આ માટે તમારે દરેક સમીકરણના ઓછામાં ઓછા બે ઉકેલોની જરૂર પડશે. આપણે આ મૂલ્યોને નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવીએ.

$x - 2y = 0$

x	0	2	–2
y	0	1	–1

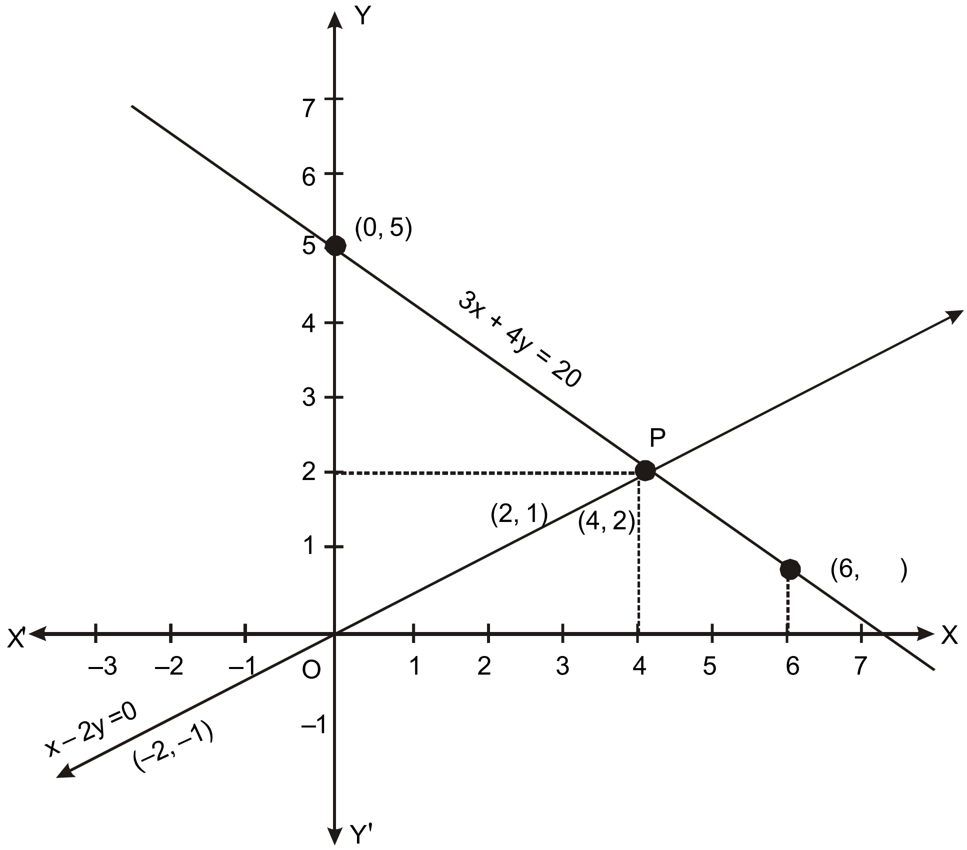
$3x + 4y = 20$

x	0	4	6
y	5	2	1/2

હવે આ બિંદુઓનું નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક જ આલેખ પત્ર પર નિરૂપણ કરો. બંને આલેકો જેના યામ (4, 2) છે એવા -- બિંદુમાં છેદે છે, આ પ્રમાણે

$x = 4$ અને $y = 2$ એ ઉકેલ છે.

તમે $x = 4$ અને $y = 2$ એ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે તે ચકાસી શકશો.



આકૃતિ 5.7

ઉદાહરણ 5.18 : *નીચેના સમીકરણ યુગ્મનો ઉકેલ શોધો.*

$x + y = 8$ ...(1)

$2x - y = 1$ ...(2)

ઉકેલ : *આ સમીકરણોનો આલેખ દોરવા માટે દરેક સમીકરણના ઉકેલો પસંદ કરીને નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક તૈયાર કરો.*

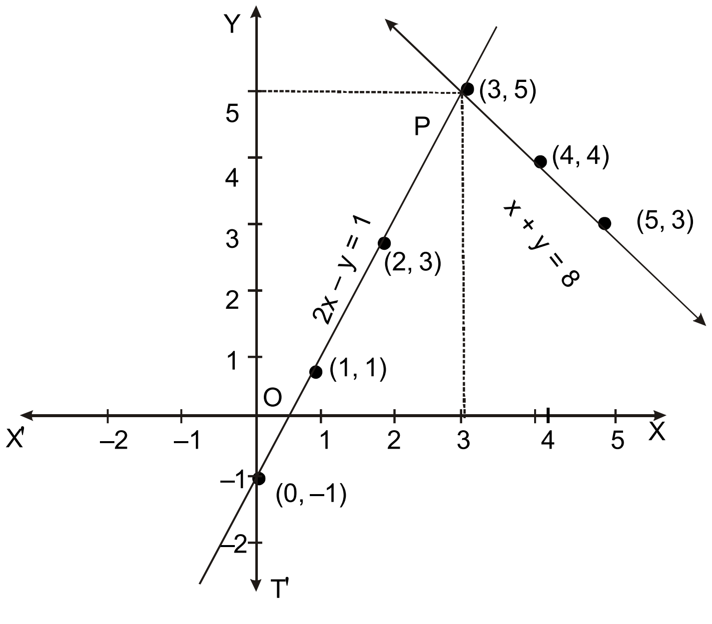
$x + y = 8$

x	3	4	5
y	5	4	3

$2x - y = 1$

x	0	1	2
y	–1	1	3

$x + y = 8$ નો આલેખ મેળવવા માટે (3, 5), (4, 4) અને (5, 3) બિંદુઓ અને $2x - y = 1$ નો આલેખ મેળવવા માટે (0, -1), (1, 1) અને (2, 3) બિંદુઓનું એક જ આલેખપત્ર પર નિરૂપણ કરો. આ બંને રેખાઓ જેના યામ (3, 5) છે એવા P બિંદુમાં પરસ્પર છેદે છે. તેથી x = 3 અને y = 5 આ બંને સમીકરમોનું એક સાથે સમાધાન કરે છે એવું તમે ચકાસી શકશો.



આકૃતિ 5.8

ઉદાહરણ 5.19 : *નીચેના સમીકરણ યુગ્મનો ઉકેલ શોધો.*

$x + y = 2$ ...(1)

$2x + 2y = 4$ ...(2)

ઉકેલ : દરેક સમીકરણના કેટલાક ઉકેલો માટેનું કોષ્ટક તૈયાર કરો.

$x + y = 2$

x	0	2	1
y	2	0	1

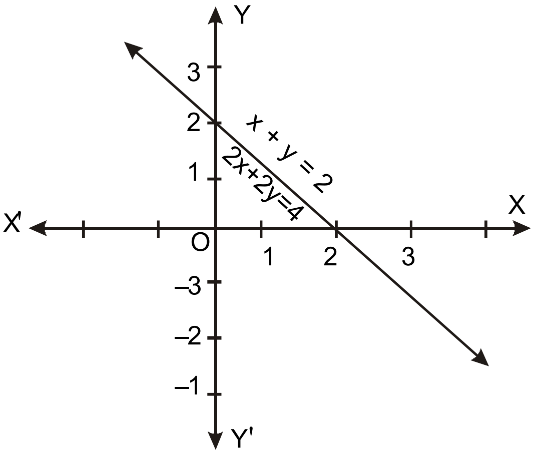
$2x + 2y = 4$

x	0	2	1
y	2	0	1

હવે આ ઉકેલોને અનુરૂપ બિંદુઓનું નિરૂપણ કરી આ સમીકરણઓના આલેખ દોરો.

તમે જોઈ શકશો કે બંને સમીકરણના આલેખ એક જ છે. તેથી સમીકરણ યુગ્મના ઉકેલો અનંત છે. (અસંખ્ય ઉકેલો છે.)

દા.ત. $x = 0, y = 2, x = 1, y = 1, x = 2, y = 0$ વગેરે વળી તમે એ પણ જોઈ શકશો કે આ બંને સમીકરણો અનિવાર્ય રીતે (મૂળભૂત રીતે) એક જ સમીકરણ છે.



આકૃતિ 5.9

ઉદાહરણ 5.20 : નીચેના સમીકરણ યુગ્મનો ઉકેલ શોધો.

$$2x - y = 4 \qquad ...(1)$$

$$4x - 2y = 6 \qquad ...(2)$$

ઉકેલ : સમીકરણ યુગ્મમાંના દરેક સમીકરણના કેટલાક ઉકેલો લઈ બંને સમીકરણના આલેખ દોરો

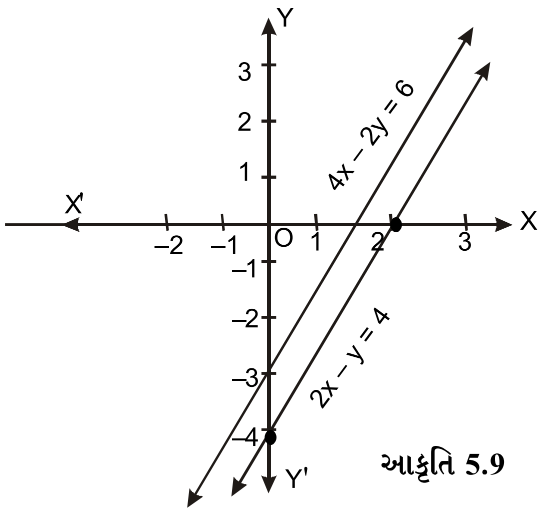
$2x - y = 4$

x	0	2	–1
y	–4	0	–6

$4x - 2y = 6$

x	0	1.5	2
y	–3	0	1

તમે જોઈ શકશો કે આ આ લેખો સમાંતર રેખાઓ છે તેમનામાં એક પણ બિંદુ સામાન્ય નથી તેથી સમીકરણ યુગ્મનો કોઈ ઉકેલ નથી.



આકૃતિ 5.9

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 5.7

નીચેના સમીકરણ યુગ્મના ઉકેલ આલેખની રીતે શોધો. વળી એ પણ જણાવો કે તેમને અનન્ય ઉકેલ છે, અસંખ્ય ઉકેલ છે કે ઉકેલ નથી.

1. $x - y = 3$
   $x + y = 5$
2. $2x + 3y = 1$
   $3x - y = 7$
3. $x + 2y = 6$
   $2x + 4y = 12$
4. $3x + 2y = 6$
   $6x + 4y = 18$
5. $2x + y = 5$
   $3x + 2y = 8$

5.7.2 બૈજિક રીત

દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ યુગ્મના ઉકેલ શોધવાની કેટલીક રીતો છે આલેખની રીત તરીકે ઓળખાતી (જાણીતી) એક પદ્ધતિ તમે શીખી ગયા છો. હવે બૈજિક પદ્ધતિ તરીકે ઓળખાતી બીજી બે પદ્ધતિઓની આપણે ચર્ચા કરીશું, તેઓ નીચે પ્રમાણે છે.

1. *અવેજી પદ્ધતિ*
2. *લોપની રીત*

નોંધ : *સમીકરણમાં અનન્ય ઉકેલ હોય (તેવા સમીકરણના ઉકેલ માટે) તેના માટે આ પદ્ધતિઓ ઉપયોગી છે.*

અવેજી પદ્ધતિ : *આ પદ્ધતિમાં આપણે એક સમીકરણમાંથી કોઈપણ એક ચલની કિંમત શોધીને તેના બીજા સમીકરણમાં અવેજીમાં મૂકીએ છીએ. આ રીતે બીજું સમીકરકણ એક ચલ સુરેખ સમીકરણ રૂપે સંક્ષિપ્ત રૂપમાં ફેરવાશે જેનો આપણે અગાઉ ઉકેલ શોધ્યો છે. આ પદ્ધતિને આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો દ્વારા સમજીએ.*

ઉદાહરણ 5.21: *નીચેના સમીકરણ યુગ્મનો ઉકેલ અવેજની રીતે શોધો.*

$$5x + 2y = 8 \qquad ...(1)$$

$$3x - 5y = 11 \qquad ...(2)$$

ઉકેલ : *સમીકરણ (1) માં આપણને* $2y = 8 - 5x$ *મળે છે. અથવા* $y = \frac{1}{2}(8 - 5x)$ *મળે ....(3)*

y ની કિંમત સમીકરણ (2) માં મૂકતાં આપણને

$$3x-\frac{5}{2}(8-5x)=11$$

$$6x-5(8-5x)=22 \quad \text{(બંને બાજુ 2 વડે ગુણતાં)}$$

$$6x-40+25x=22$$

$$31x=40+22$$

$$x=\frac{62}{31}=2$$

x = 2 નું મૂલ્ય સમીકરણ (3) માં મૂકતાં

$$y=\frac{1}{2}(8-5\times 2)=\frac{1}{2}(8-10)$$

or $$y=-\frac{2}{2}=-1$$

તેથી સમીકરણ યુગ્મનો ઉકેલ $x = 2, y = -1$ છે.

ઉદાહરણ 5.22 : અવેજી પદ્ધતિથી નીચેના સમીકરણ (1) યુગ્મનો ઉકેલ શોધો.

$$2x+3y=7 \qquad ...(1)$$

$$3x+y=14 \qquad ...(2)$$

ઉકેલ : સમીકરણ (2) માંથી આપણને $y = 14 - 3x$ મળે.... (3)

y ની કિંમત સમીકરણ (1) માં મૂકતા (તબદીલ કરતાં)

$$2x+3(14-3x)=7 \quad \text{(આપણને મળે.)}$$

$$2x+42-9x=7$$

$$2x-9x=7-42$$

$$-7x=-35$$

$$x=\frac{-35}{-7}=5$$

x = 5 ની કિંમત સમીકરણ (3) માં મૂકતાં

$$y=14-3x=14-3\times 5$$

$$y = 14 - 15 = -1$$

આથી $x = 5$ *અને* $y = -1$ *ઉકેલ છે.*

ચકાસો : *તમે ચકાસી શકશો કે* $x = 5$ *અને* $y = 1$ *બંને સમીકરણોનું સમાધાન કરે છે.*

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 5.8

નીચેના સમીકરણ યુગ્મના અવેજી રીતથી ઉકેલ શોધો.

1. $x + y = 14$
   $x - y = 2$

2. $2x + 3y = 11$
   $2x - 4y = -24$

3. $3x + 2y = 11$
   $2x + 3y = 4$

4. $7x - 2y = 1$
   $3x + 4y = 15$

લોપની રીત : *આ પદ્ધતિમાં એક ચલનો લોપ કરવા માટે બંને સમીકરણોના કોઈ પણ એક ચલના સહગુણાંકો સંખ્યાત્મક રીતે સરખા કરવા માટે શૂન્ય સિવાયની અનુકૂળ અચળ સંખ્યા વડે ગુણીને આપણે એક સમીકરણ અને બીજા સમીકરણનો સરવાળો, અથવા બાદબાકી કરીએ છીએ જેથી એક ચલનો લોપ થાય છે અને આપણને એક ચલ સમીકરણ મળે છે.*

હવે આપણે આ પદ્ધતિએ સ્પષ્ટ કરવા કેટલાંક ઉદાહરણો વિષે વિચારીએ.

ઉદાહરણ 5.23 : *લોપની રીત વાપરીને નીચેના સમીકરણ યુગ્મનો ઉકેલ શોધો.*

$$3x - 5y = 4 \quad ...(1)$$

$$9x - 2y = 7 \quad ...(2)$$

ઉકેલ : x *નો લોપ કરવા માટે,* x *ના સહગુણાંક સરખા કરવા માટે સમીકરણ (1) ને 3 વડે ગુણો જેથી નીચે પ્રમાણે સમીકરણો મળશે.*

$$9x - 15y = 12 \quad ...(3)$$

$$9x - 2y = 7 \quad ...(4)$$

સમીકરણ (3) માંથી સમીકરણ (4) બાદ કરતાં

$$9x - 15y - (9x - 2y) = 12 - 7$$

$$9x - 15y - 9x + 2y = 5$$

$$-13y = 5$$

$$y = -\frac{5}{13}$$

$y = -\frac{5}{13}$ સમીકરણ (1) માં મૂકતાં

$$3x - 5 \times \left(-\frac{5}{13}\right) = 4$$

$$3x + \frac{25}{13} = 4$$

$$3x = 4 - \frac{25}{13} = \frac{27}{13}$$

$$x = \frac{9}{13}$$

તેથી, $x = \frac{9}{13}$ અને $y = -\frac{5}{13}$ એ આપેલ સમીકરણ યુગ્મનો જરૂરી ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 5.24 : લોપની રીત વાપરીને નીચેના સમીકરણ યુગ્મનો ઉકેલ શોધો.

$$2x + 3y = 13 \qquad ...(1)$$

$$5x - 7y = -11 \qquad ...(2)$$

ઉકેલ : y નો લોપ કરવા માટે સમીકરણ (1) ને 7 વડે અને સમીકરણ (2) ને 3 વડે ગુણતાં

$$14x + 21y = 91 \qquad ...(3)$$

$$15x - 21y = -33 \qquad ...(4)$$

સમીકરણ (3) અને (4) નો સરવાળો કરતાં

$$29x = 58$$

$$x = \frac{58}{29} = 2$$

$x = 2$ સમીકરણ (1) માં મૂકતાં

$$2 \times 2 + 3y = 13$$

$$3y = 13 - 4 = 9$$

$$y = \frac{9}{3} = 3$$

તેથી $x = 2$ અને $y = 3$ આપેલ સમીકરણ યુગ્મનો ઉકેલ છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 5.9

લોપની રીતથી નીચેના સમીકરણ યુગ્મોનો ઉકેલ શોધો

1. $3x + 4y = -6$
   $3x - y = 9$
2. $x + 2y = 5$
   $2x + 3y = 8$
3. $x - 2y = 7$
   $3x + y = 35$
4. $3x + 4y = 15$
   $7x - 2y = 1$
5. $2x + 3y = 4$
   $3x + 2y = 11$
6. $3x - 5y = 23$
   $2x - 4y = 16$

5.8 ફૂટ પ્રશ્નો (વ્યવહારિક કોયડાઓ)

ઉદાહરણ 5.25 : એક લંબચોરસ બગીચાની પરિમિતિ 20 મીટર રછે. જો તેની લંબાઈ તેની પહોળાઈ કરતાં 4 મીટર વધારે હોય, તો બગીચાની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બગીચાની લંબાઈ x મીટર છે, તેથી બગીચાની પહોળાઈ (x - 4) મીટર હોય, પરિમિત 20 મીટર હોવાથી

$$2\,[x + (x - 4)] = 20$$

$$2(2x - 4) = 20$$

$$2x - 4 = 10$$

$$2x = 10 + 4 = 14$$

$$x = 7$$

લંબચોરસની લંબાઈ 7 મીટર અને પહોળાઈ 7-4 = 3 મીટર છે.

વૈકલ્પિક રીતે : બે ચલોનો ઉપયોગ કરીને નીચે પ્રમાણે પ્રક્રિયા કરીને તમે ફૂટ પ્રશ્નો ઉકેલ શોધી શકશો.

ધારો કે બગીચાની લંબાઈ x મીટર છે

અને બગીચાની પહોળાઈ x મીટર

$$x = y + 4 \qquad ...(1)$$

વળી પરિમિત 20 મીટર છે.

$$2(x + y) = 20$$

$$x + y = 10 \qquad ...(2)$$