6

દ્વિઘાત સમીકરણ

આ પ્રકરણમાં તમે દ્વિઘાત સમીકરણ વિશે શીખશો તમે આપેલા સમીકરણ સમૂહમાંથી દ્વિઘાત સમીકરણને ઓળખી શકશો ઓ તેને પ્રમાણિ સ્વરૂપમાં લખી શકશો તમે દ્વિઘાત સમીકરણને ઉકેલતાં , સરળ સ્વરૂપે દર્શાવતા અને દ્વિધાત સમીકરણનો ઉપયોગ કરી ફુટ પ્રશ્નો ઉકેલતાં શીખશો.

હેતુઓ

આ પ્રકરણમાં અભ્યાસ કર્યા પછી તમે

- આપેલ સમીકરણ સમૂહમાંથી દ્વિઘાત સમીકરણને ઓળખી શકશો.
- દ્વિઘાત સમીકરણને પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકશો.
- (1) અવયવો અને (2) પૂર્ણવર્ગ ની રીતે દ્વિઘાત સમીકરણને ઉકેલી શકશો.

  દ્વિઘાત સૂત્ર ની રીતે
- દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉપયોગ કરીને ફુટ પ્રશ્નોના ઉકેલ શોધી શકશો.

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

- બહુપદીઓ
- બહુપદીના શૂન્યો
- સુરેખ સમીકરણો અને તેના ઉકેલો
- બહુપદીના અવયવો.

6.1 દ્વિઘાત સમીકરણ

તમે બે ઘાતવાળી બહુપદીથી પરિચિત છો. બે ઘાતવાળી બહુપદીને દ્વિઘાત બહુપદી કહેવાય છે. જ્યારે દ્વિઘાત બહુપદીને શૂન્ય બરાબર (શૂન્ય સમાન) કરીએ ત્યારે તે દ્વિઘાત સમીકરણ કહેવાય છે . આ પ્રકરણમાં તમે માત્ર એકચલ દ્વિઘાત સમીકરણ વિશે શીખશો. આપેલ સમીકરણ સમૂહમાંથી દ્વિઘાત સમીકરણને ઓળખવા માટે કેટલાક ઉદાહરણો જોઈએ .

ઉદાહરણ : નીચેના સમીકરણોમાંથી ક્યાં સમીકરણો દ્વિઘાત સમીકરણો છે ?

(i) $3x^2 = 5$ i) $x^2 + 2x + 3 = 0$

(iii) $x^3 + 1 = 3x^2$ (iv) $(x + 1)(x + 3) = 2x + 1$

(v) $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ (v) $x^2 + \sqrt{x} + 1 = 0$

ઉકેલ:

(i) *તે દ્વિઘાત સમીકરણ છે કારણ કે* $3x^2 = 5$ *ને* $3x^2 - 5 = 0$ *સ્વરૂપે લખી શકાય છે અને* $3x^2 - 5$ *એ દ્વિઘાત બહુપદી છે.*

(ii) $x^2 + 2x + 3 = 0$ *એ દ્વિઘાત સમીકરણ છે કારણ કે* $x^2 + 2x + 3$ *એ બે ઘાત વાળી બહુપદી છે.*

(iii) $x^3 + 1 = 3x^2$ *ને* $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ *સ્વરૂપમાં લખી ને મહત્તમ ઘાતાંક 3 છે તથી આ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ નથી.*

(iv) $(x + 1)(x + 3) = 2x + 1$ *એ દ્વિઘાત સમીકરણ છે કારણ કે* $(x + 1)(x + 3) = 2x + 1$ *ને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.*

$$x^2 + 4x + 3 = 2x + 1$$

or $x^2 + 2x + 2 = 0$

હવે ડાબી બાજુ દ્વિઘાત બહુપદી છે તેથી $(x + 1)(x + 3) = 2x + 1$ *એ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.*

(v) $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ *એ દ્વિઘાત સમીકરણ નથી*

કારણ કે $\frac{1}{x}$ *પદનો ઘાતાક -1 છે તેમ છતાં આપણે તેને નીચે પ્રમાણે દ્વિઘાત સમીકરણની સ્થિતિમાં લાવી શકીએ.*

or $\frac{x^2 + 1}{x} = \frac{5}{2}, x \neq 0$

or $2(x^2 + 1) = 5x$, x ¹ 0

or $2x^2 - 5x + 2 = 0$, x ¹ 0

(vi) $x^2 + \sqrt{x} + 1 = 0$ *એ દ્વિઘાત સમીકરણ નથી કારણે કે* $x^2 + \sqrt{x} + 1$ *એ દ્વિઘાત બહુપદી નથી*

(શા માટે ?

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 6.1

૧. નીચેના ક્યા સમીકરણો દ્વિઘાત સમીકરણો છે ?

(i) $3x^2 + 5 = x^3 + x$ (ii) $\sqrt{3}x^2 + 5x + 2 = 0$

(iii) $(5y + 1)(3y - 1) = y + 1$ (iv) $\frac{x^2+1}{x+1} = \frac{5}{2}$

(v) $3x + 2x^2 = 5x - 4$

દ્વિઘાત સમીકરણનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ

$ax^2 + bx + c = 0, a > 0$ સ્વરૂપનું દ્વિઘાત સમીકરણ કે જેમાં a, b, c, અચળ અને x ચલ છે તેવા સમીકરણને દ્વિઘાત સમીકરણનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ કહે છે દરેક દ્વિઘાત સમીકરણને હમેંશા પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે.

ઉદાહરણ : ૨ નીચેનાં સમીકરણોમાંથી ક્યા સમીકરણો પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં છે ? જે સમીકરણો પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં નથી તેમને પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં દર્શાવો .

(i) $2 + 3x + 5x^2 = 0$ (ii) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

(iii) $7y^2 - 5y = 2y + 3$ (iv) $(z + 1)(z + 2) = 3z + 1$

ઉકેલ: (i) તે પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં નથી. તેવું પ્રમાણિત સ્વરૂપ $5x^2 + 3x + 2 = 0$ છે.

(ii) તે પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં છે.

(iii) તે પ્રમાણિત સ્વરૂપમા નથી.

$7y^2 - 5y = 2y + 3$

$7y^2 - 5y - 2y - 3 = 0$

$7y^2 - 7y - 3 = 0$ જે હવે પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં છે.

(ii) તે પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં નથી તેને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.

$(z + 1)(z + 2) = 3z + 1$

$z^2 + 3z + 2 = 3z + 1$

$z^2 + 3z - 3z + 2 - 1 = 0$

$z^2 + 1 = 0$

$z^2 + 0z + 1 = 0$

જે હવે પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 6.2

1. નીચેના માંથી ક્યા દ્વિઘાત સમીકરણો પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં છે ? જે સમીકરણો પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં નથી તેમને પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં લખો.

   (i) $3y^2 - 2 = y + 1$ (ii) $5 - 3x - 2x^2 = 0$

   (iii) $(3t - 1)(3t + 1) = 0$ (iv) $5 - x = 3x^2$

6.3 દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ

તમે બહુપદીનાં શૂન્યો વિશે શીખી ગયા છો બહુપદીના શૂન્ય એ એવી વાસ્તવિક સંખ્યા છે જે તે ચલના સ્થાન મુકતાં બહુપદીનું મૂલ્ય શૂન્ય થાય છે.

દ્વિઘાત સમીકરણ બાબતમાં ચલતી જે કિંમત અને કારણો ડા.બા. અને જ.બા સરખી થાય છે તેને દ્વિઘાત સમીકરણનું બીજ અથવા ઉકેલ કહેવાય છે. વળી તમે એ પણ શીખી ગયા છો કે જો એ બહુપદી $p(x)$, નું શૂન્ય હોય, તો $(x - a)$ એ બહુપદી $p(x)$ નો અવયઅવ છે તેથી ઉલટું જો , if $(x - a)$ એ બહુપદીનું શૂન્ય છે તમે આ પરિણામો દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ શોધવામા વાપરી શકશો. દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ શોધવાની બે બૈજિક રીતો છે (i) અવયઅવની રીત (ii) પૂર્ણ વર્ગની રીત.

(દ્વિઘાત સૂત્રની રીત)

અવયઅવની રીત

હવે આપણે દ્વિઘાત સમીકરણના સૂરેખ અવયઅવો પાડીને તેનો ઉકેલ શોધવાનું શીખીએ ઉદાહરણો દ્વારા આ રીત દર્શાવી છે.

ઉદાહરણ 6.3: $(x - 4)(x + 3) = 0$ સમીકરણનો ઉકેલ શોધો.

જ્યારે $(x - 4)(x + 3) = 0$, છે તેથી

$x - 4 = 0$, અથવા $x + 3 = 0$

$x = 4$ અને અથવા $x = -3$

$x = 4$ અને $x = -3$ એ સમીકરણનો ઉકેલે છે.

ઉદાહરણ 6.4: $6x^2 + 7x - 3 = 0$ સમીકરણનો અવયઅવ પાડીને ઉકેલ શોધો

ડાબી બાજુએ મધ્યમ પદના ભાગ પાડતાં

$6x^2 + 9x - 2x - 3 = 0$ [કારણ કે $6 \times (-3) = -18 = 9 \times (-2)$ અને $9 - 2 = 7$]

$3x(2x + 3) - 1(2x + 3) = 0$

$(2x + 3)(3x - 1) = 0$

$2x + 3 = 0$ અથવા $3x - 1 = 0$

$x = -\frac{3}{2}$ અથવા $x = \frac{1}{3}$

$x = -\frac{3}{2}$ અને $x = \frac{1}{3}$ સમીકરણના ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 6.5: $x^2 + 2x + 1 = 0$ સમીકરણનો ઉકેલ શોધો.

$x^2 + 2x + 1 = 0$ આપેલ છે.

$(x + 1)^2 = 0$

$x + 1 = 0$

$x = -1$ મળશે.

$x = -1$ એ એક માત્ર ઉકેલ છે.

નોંધ : ઉદાહરણ 6.3 અને 6.4 તમે જોયું કે તે સમીકરણોને બે ભિન્ન ઉકેલ હતા તેમ છતાં સમીકરણ 6.5માં તમને એકજ ઉકેલ મળ્યો આપણે તેને બે ઉકેલ છે તેમ કહીએ છીએ તે યોગાનું યોગ છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાશો 6.3

1. અવયઅવની રીત વાપરીને નીચેના સમીકરણોના ઉકેલ શોધો.

(i) $(2x + 3)(x + 2) = 0$ (ii) $x^2 + 3x - 18 = 0$

(iii) $3x^2 - 4x - 7 = 0$ (iv) $x^2 - 5x - 6 = 0$

(v) $25x^2 - 10x + 1 = 0$ (vi) $4x^2 - 8x + 3 = 0$

દ્વિઘાત સૂત્ર ની રીત (પૂર્ણ વર્ગની રીત)

હવે તમે દ્વિઘાત સમીકરણના ઉકેલ શોધવા માટેનુ સૂત્ર શોધતાં શીખશો આ માટે આપણા દ્વિઘાત સમીકરણનું સામાન્ય સ્વરૂપ $ax^2 + bx + c = 0$ ને પૂર્ણ વર્ગમાં ફેરવીને લખીશું આપણને

We have $ax^2 + bx + c = 0$ આપેલું છે x^2 ના સહગુણને બેકી સંખ્યાનો પૂર્ણ વર્ગ બનાવવા માટે બંન્ને બાજુઓ 4 વડે ગણતા.

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$ મળે

બંન્ને બાજુ x^2 ઉમેરતાં

$(2ax)^2 + 2(2ax)b + (b)^2 + 4ac = b^2$

$$(2ax)^2 + 2(2ax)b + (b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$(2ax+b)^2 = \left\{\pm\sqrt{b^2-4ac}\right\}^2$$

$$2ax+b = \pm\sqrt{b^2-4ac}$$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

આમ દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ *ના બે ઉકેલ મળે છે.*

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{(ii)} \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

અહીં $(b^2 - 4ac)$, *અભિવ્યક્તિને* by D, *ચિહ્નથી દર્શાવીશું ને* **Discriminant**, *વિવેચક કહેવાય છે, કારણ કે તે ઉકેલ (ના બીજ)ની સંખ્યા અથવા દ્વિઘાત સમીકરણના બીજના સ્વરૂપ નક્કી કરે છે.*

દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, if

(i) $D = b^2 - 4ac > 0$, *તો સમીકરણને બે ભિન્ન*

વાસ્તવિક બીજ $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *અને* $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

(ii) $D = b^2 - 4ac = 0$, *તો સમીકરણને બે ભિન્ન સંખ્યા*

વાસ્તવિક બીજ $\dfrac{-b}{2a}$ *સ્વરૂપમાં મળે.*

(iii) $D = b^2 - 4ac < 0$, *તો સમીકરણે એકપણ વાસ્તવિક બીજ નહીં હોય કારણ કે ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યાનું વર્ગમુળ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી.*

આમ દ્વિઘાત સમીકરણને વધુમાં વધુ બે બીજ હોય છે.

ઉદાહરણ 6.6: *બીજ નક્કી કર્યા સિવાય નીચેના સમીકરણના બીજનું સ્વરૂપ (બીજની સંખ્યા) વિષે અભિપ્રાય આપો.*

(i) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

(ii) $2x^2 + x + 1 = 0$

(iii) $x^2 + 2x + 1 = 0$ *(ઉદાહરણ 6.5માં આનો ઉકેલ આપ્યો છે)*

ઉકેલ: (i) *આપેલ સમીકરણ* $3x^2 - 5x - 2 = 0$ *ને* $ax^2 + bx + c = 0$, *સાથે સરખાવતાં આપણને* $a = 3, b = -5$ *અને* $c = -2$ *મળે*

હવે $D = b^2 - 4ac \quad = (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-2)$

$= 25 + 24 = 49$

જ્યારે $D > 0$, હોવાથી સમીકરણને બે ભિન્ન વાસ્તવિક બાજ છે.

(ii) સમીકરણ $2x^2 + x + 1 = 0$ ને $ax^2 + bx + c = 0$, સાથે સરખાવતાં

$a = 2, b = 1$ અને $c = 1$ મળે

હવે $D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 - 8 = -7$

જ્યારે $D = b^2 - 4ac < 0$, હોવાથી સમીકરણને કોઈ વાસ્તવિક બીજ નહીં હોય.

(iii) સમીકરણ $x^2 + 2x + 1 = 0$ ને $ax^2 + bx + c = 0$,

સાથે સરખાવતાં $= 1, b = 2, c = 1$ મળે.

હવે $D = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$

જ્યારે, $D = b^2 - 4ac = 0$ હોવાથી સમીકરણને બે સમાન વાસ્તવિક બીજ મળે.

ઉદાહરણ 6.7: વર્ગ સૂત્ર (પૂર્ણ વર્ગ)ની રીત વાપરીને સમીકરણ $6x^2 - 19x + 15 = 0$ સાથે સરખાવતાં $ax^2 + bx + c = 0$ અને $a = 6, b = -19, c = 15$

હવે $D = b^2 - 4ac = (-19)^2 - 4 \times 6 \times 15$

$\frac{20}{12}$ $\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{19 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{19 \pm 1}{12}$ $\quad = 361 - 360 = 1$

?. તેથી

$x =$

$x = \frac{19+1}{12} = \frac{5}{3}$ and $\frac{19-1}{12} = \frac{3}{2}$

તેથી બીજ $= \frac{5}{3}$ and $\frac{3}{2}$. છે.

ઉદાહરણ 6.8: સમીકરણ $3x^2 + mx - 5 = 0$ માંથી ની કિંમત એવી શોધો કે જેથી સમીકરણને બે સમાન બીજ મળે.

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણને $ax^2 + bx + c = 0$

સાથે સરખાવતા, $a = 3, b = m$ અને $c = -5$ મળે

સમાનબીજ માટે

$D = b^2 - 4c = 0$ હોવું જોઈએ

$m^2 - 4 \times 3 \times (-5) = 0$

$m^2 = 60$

$m^2 = \pm 2\sqrt{15}$

$m = \pm 2\sqrt{15}$,

ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યાનું વર્ગમુળ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી તેથી m ની કોઈ કિંમત માટે સમીકરણને વાસ્તવિક બીજ મળશે નહી.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 6.4

1. બીજ નક્કી કર્યા સિવાય નીચેના સમીકરણના બીજના સ્વરૂપ (બીજની સંખ્યા) વિષે અભિપ્રાય આપા ?

   (i) $3x^2 - 7x + 2 = 0$ (ii) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ (iii)
   (iii) $25x^2 + 20x + 4 = 0$ (iv) $x^2 - x + 1$

2. દ્વિઘાત સૂત્રની રીત વાપરીને વનીચેના સમીકરણો ઉકેલો ?

   (i) $y^2 - 14y - 12 = 0$ (ii) $x^2 - 5x = 0$

   (iii) $x^2 - 15x + 50 = 0$

3. નીચેના સમીકરણોના વાસ્તવિક સમાન બીજ મળે તે રીતે m ની કીંમત શોધો ?

   (i) $2x^2 - mx + 1 = 0$ (ii) $mx^2 + 3x - 5 = 0$

   (iii) $3x^2 - 6x + m = 0$ (iv) $2x^2 + mx - 1 = 0$

6.4 કુટ પ્રશ્નો (વ્યાવહારિક કોયડાઓ

હવે જેમાં દ્વિઘાત સમીકરણનો સમાવેશ થતો હોય (ઉપયોગ થતો હોય) તેવા કુટ પ્રશ્નોનો ઉકેલ આપણે શોધીશું.

ઉદાહરણ 6.9: બે ક્રમિક એકી પ્રકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો 74 છે તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : ધારોકે બે ક્રમિક એકી સંખ્યાઓ x અને x + 2 તેમના વર્ગોનો સરવાળો 74 થતો હોવાથી

; $x^2 + (x + 2)^2 = 74$ મળે

; $x^2 + x^2 + 4x + 4 = 74$

; $2x^2 + 4x - 70 = 0$

; $x^2 + 2x - 35 = 0$

; $x^2 + 7x - 5x - 35 = 0$

; $x(x + 7) - 5(x + 7) = 0$

; $(x + 7)(x - 5) = 0$

; $x + 7 = 0$ અથવા $x - 5 = 0$

; $x = -7$ અથવા $x = 5$

હવે x એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોવાથી $x = -7$ હોઈ શકે નહીં

$x = 5$ $x = 2 \quad 5x\,2 \quad = -7$

તેથી સંખ્યાઓ 5 અને 7 છે

ઉદાહરણ 6.10: બે ચોરસ મેદાનોના ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો 468 ચો.મીટર છે જો તેમની પરિમિતિનો તફાવત 24 મીટર હોય, તો બંન્ને ચોરસવાળી બાજુઓ શોધો.

ઉકેલ : ધારોકે મોટા ચોરસની બાજુનું માપ x મીટર છે અને નાના ચોરસની બાજુનું માપ y મીટર છે મોટા મેદાનની પરિમિતી 4x મીટર અને નાના ચોરસની પરિમિતી 4y મીટર થાય.

તેમનો તફાવત 24 મીટર છે

$4x - 4y = 24$

$x - y = 6$

$x = y + 6$ ....(1)

$\frac{-6+30}{2}$ બંન્નેના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો 468 ચો.મીટર[11] છે

$x^2 + y^2 = 468$ ....(2)

સ.કુ.(1) માંથી x ની કિંમત સ.કુ. (2) માં મુકતાં

$(y + 6)^2 + y^2 = 468$

$y^2 + 12y + 36 + y^2 = 468$

$2y^2 + 12y - 432 = 0$

$y^2 + 6y - 216 = 0$

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{36+864}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{900}}{2}$$

$$y = \frac{-6 \pm 30}{2} \quad y = \qquad \text{અથવા}$$

$y = 12$ અથવા $y = 18$

ચોરસની બાજુ ઋણ ન હોઈ શકે $y = 12$

$x = y + 6 = 12 + 6 = 18$

મોટા ચોરસની બાજુની લંબાઈ 18 મીટર અને

નાના ચોરસની બાજુની લંબાઈ 12 મીટર

ઉપરના દાખલાને નીચેની રીતે ગણીએ તો ?

ધારોકે મોટા ચોરસની બાજુનું માપ x મીટર છે

તેની પરિમિતી x મીટર થાય

બન્નેની પરિમિતી નો તફાવત 24 મીટર છે

નાના ચોરસની પરિમિતી (4x - 24) મીટર થાય.

નાના ચોરસની બાજુંનું માપ મીટર

બન્નેના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો 468 ચોમી. છે

ઉદાહરણ 6.11: બે અંકોની એક સંખ્યાના અંકોનો ગુણાકાર 12 છે જો તે સંખ્યામાં 9 ઉમેરવામાં આવેતો અંકોના સ્થાન અદલ બદલ થાય છે તો તે સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : ધારોકે તે સંખ્યાનો દશાકનો આંક x છે અને એકમનો આંક y છે

સંખ્યા $= 10y + x$

અંકોની બદલી કરતાં નવી સંખ્યા

$10y + x$

$10x + y + 9 = 10y + x$

$10x - x + y - 10y = -9$

$9x - 9y = -9$

$x - y = -1$

$x =- + y - 1 \qquad ...(1)$

અંકોનો ગુણાકાર 12 છે

$xy = 12 \qquad ...(2)$

સ.ક. (1) માંથી x ની કિંમત સં.ક. (2) માં મુકતાં

$(y - 1)y = 12$

$y^2 - y - 12 = 0$

$(y - 4)(y + 3) = 0$

$y = 4$ or $y = -3$

અંક ઋણ હોઈ શકે નહિં $= 4$

$x = y - 1 = 4 - 1 = 3$

34.

ઉદાહરણ 6.12: બે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો 12 છે તેમની વ્યસ્ત સંખ્યાઓનો સરવાળો $\frac{4}{9}$, છે તો તે સંખ્યાઓ શોધો .

ઉકેલ: ધારોકે એક સંખ્યા x છે તો બીજી સંખ્યા 12- x - હોય છે.

તેમના વ્યસ્તોનો સરવાળો $\frac{4}{9}$ છે.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{12-x} = \frac{4}{9}, \quad x \neq 0, \; 12 - x \neq 0$$

$$\frac{12 - x + x}{x(12-x)} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{12}{12x - x^2} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{12 \times 9}{4} = 12x - x^2$$

$27 = 12x - x^2$

$x^2 - 12x + 27 = 0$

$(x - 3)(x - 9) = 0$

$x = 3$ અથવા $x = 9$

જ્યારે $x = 3$, ત્યારે બીજી સંખ્યા $12 - 3 = 9$ હોય જ્યારે પહેલી સંખ્યા 9 હોય ત્યારે બીજી સંખ્યાઓ 3 અને 9 છે .

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 6.5

1. બે ક્રમિક બેકી પ્રાકૃતિક સંખ્યાના વર્ગોનો સરવાળો 164 થાય છે તે સંખ્યા શોધો.
2. એક લંબચોરસ બગીચાની લંબાઈ તેની પહોળાઈ કરતાં 7 મીટર વધારે છે બગીચાનું ક્ષેત્રફળ 144 ચો.મી. છે તો બગીચાની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો .
3. બે અંકની સંખ્યાના અંકોનો સરવાળો 13 છે જો તેમના વર્ગનો સરવાળો 89 છે તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

4. બે અંકોની સંખ્યા દશકનો આંક એકમના અંક ના બમણા કરતાં 2 વધારે છે જો તે અંકોનો ગુણાકાર 24 હોય તો તે સંખ્યા શોધો.

5. બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 15 છે તો તેમના વ્યસ્તનો સરવાળો   છે તોતે સંખ્યા શોધો.

સારાંશ - ઉપસંહાર

- $ax^2 + bx + c = 0, a ^{1} 0$ દ્વિઘાત સમીકરણ તરીકે કે જેમાં a, b, c અચળ અને x ચલ છે તેવા સ્વરૂપે ને (સમીકરણને) દ્વિઘાત સમીકરણનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ કહેવાય છે.
- ચલનું જે મૂલ્ય કે મૂલ્યો દ્વિઘાત સમીકરણનું સમાધન કહે છે (ઉકેલ આપે છે) તેઓ તેમાં બીજ અથવા ઉકેલ કહેવાય છે.
- દ્વિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યો તેને (બહુપદીને) અનુરૂપ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ અથવા ઉકેલ કહેવાય છે.
- જો તમે $ax^2 + bx + c = 0, a ^{1} 0$ ના બે સુરેખ અવયઅવો પાડી શકોતો દ્વિઘાત સમીકરણax^2 $ax^2 + bx + c = 0,$ ના બીજ દરેકઅવય અવની કિંમત શૂન્ય મૂકીને મેળવી શકો.

$ax^2 + bx + c = 0, a \# 0$ નાં બીજ

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- $b^2 - 4ac$ એ દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0, a ^{1} 0$ (distinct) નો વિવેક કહેવાય છે. સામાન્ય રીતે તેને D થી દર્શાવાય છે.

  (i) જો $D > 0$ તો દ્વિઘાત સમીકરણને બે ભિન્ન વાસ્તવિક બીજ હોય છે.

  (ii) જો $D = 0$ તો દ્વિઘાત સમીકરણને બે સમાન વાસ્તવિક બીજ હોય છે.

  (iii) જો $D < 0$, તો દ્વિઘાત સમીકરણને વાસ્તવિક બીજ હોતાં નથી.

અંતિમ સ્વધ્યાય

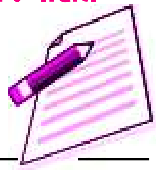
1. નીચેનામાંથી ક્યાં દ્વિઘાત સમીકરણો છે ?

   (i) $y\left(\sqrt{5}y - 3\right) = 0$ (ii) $5x^2 - 3\sqrt{x} + 8 = 0$

   (iii) $3x - \frac{1}{x} = 5$ (iv) $x(2x + 5) = x^2 + 5x + 7$

2. અવયઅવની રીત વાપરીને નીચેના સમીકરણો ઉકેલો

   (i) $(x - 8)(x + 4) = 13$ (ii) $3y^2 - 7y = 0$



(iii) $x^2 + 3x - 18 = 0$ (iv) $6x^2 + x - 15 = 0$

3. $5x^2 - 3x + m = 0$ ને બે સમાન બીજ હોય, તો તેની કિંમત શોધો.
4. $x^2 - mx - 1 = 0$ ને બે સમાન હોય, તો તેની કિંમત શોધો.
5. દ્વિઘાત સૂત્ર નીચેના સમીકરણોના ઉકેલ શોધો.

   (i) $6x^2 - 19x + 15 = 0$ (ii) $x^2 + x - 1 = 0$

   (iii) $21 + x = 2x^2$ (iv) $2x^2 - x - 6 = 0$
6. કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓનું માપ $x - 1$, x અને $x + 1$ છે તો xની કિંમત શોધો. અને તે પરથી બાજુઓનાં માપ શોધો.
7. અજ ક્રમિક એકી પૂર્ણાંકોના વર્ગોનો સરવાળો 290 થાય છે તો તે અંકો શોધો.
8. કારકોણ ત્રિકોણના કર્ણોનું માપ 13 સેમી છે બાકીની બે બાજુઓના માપનો તફાવત 7 સેમી. હોય તો બંન્ને ચોરસની બાજુઓનાં માપ શોધો.
9. બે ચોરસના ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો 41 ચો. મી છે તેમની પરિમિતીનો સરવાળો 36 સેમી. છે તો બંન્ને ચોરસની બાજુઓનાં માપ શોધો.
10. 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં સમદ્વિજ કાટકોણ ત્રિકોણ અંતર્ગત છે તો ત્રિકોણની બાજુઓ (બાજુઓનાં માપ) શોધો.

તમારી પ્રગતિ ચકોસના ઉત્તરો

6.1

1. (ii), (iii), (v)

6.2

1. (i) No, $3y^2 - y - 3 = 0$ (ii) No, $2x^2 + 2x - 5 = 0$

   (iii) No, $6t^2 + t - 1 = 0$ (iv) No, $3x^2 + x - 5 = 0$

6.3

1. (i) $\frac{3}{2}, -2$ (ii) $3, -6$ (iii) $\frac{7}{3}, -1$

   (iv) $2, 3$ (v) $\frac{1}{5}, \frac{1}{5}$ (vi) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

6.4

1. (i) બે ભિન્ન વાસ્તવિક બીજ

(ii) બે સમાન વાસ્તવિક બીજ

(iii) બે સમાન વાસ્તવિક બીજ

(iv) વાસ્તવિક બીજ નહીં હોય

2. (i) $7 \pm \sqrt{37}$ (ii) 0, 5 (iii) 5, 10

3. (i) $\pm 2\sqrt{2}$ (ii) $\frac{9}{20}$ (iii) 3 (iv) m ની કોઈ કિંમત નહિં.

6.5

1. 8, 10 2. 16m, 9m 3. 85, 58 4. 83

અંતિમ સ્વાધ્યાયના જવાબો

1. (i), (iv)

2. (i) 8, 4 (ii) $0, \frac{7}{3}$ (iii) 3, – 6 (iv) $\frac{3}{2}, -\frac{5}{3}$

3. $\frac{9}{20}$

4. m ની કોઈ પણ કિંમત માટે સમાન બીજ મળશે નહીં. (રકમ ખોટી છે.)

5. (i) $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ (ii) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (iii) $\frac{7}{2}, -3$ (iv) $2, \frac{3}{2}$

6. 3, 4, 5

7. 11, 13 અથવા –13 , –11

8. 5 cm, 12 સેમી

9. 5 cm, 4 સેમી

10. $5\sqrt{2}$ cm, $5\sqrt{2}$ સેમી, 10 સેમી