

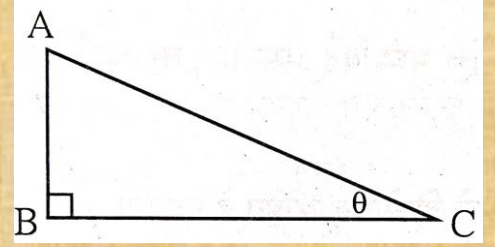
## त्रिकोणमिती

त्रिकोणमितीची काही गुणोत्तरे आपण मागील वर्षी अभ्यासली आहेत. याही वर्षी आणखी जास्त गुणोत्तरे जाणून घेण्याचा प्रयत्न करूया.

त्रिकोणमिती म्हणजे त्रिकोण + मिती = त्रिकोणमिती. मिती म्हणजे माप त्रिकोणाचे माप यावर आधारीत काही गुणोत्तरे आहे. काटकोन त्रिकोणाची ओळख आपल्या सर्वांनाच आहे.

चला, तर मग गुणोत्तरां विषयी आणखी माहिती पाहूया.

$\Delta ABC$  हा काटकोन त्रिकोण आहे.



$$\sin \theta = \frac{\text{समोरची बाजू}}{\text{कर्ण}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{लगतची बाजू}}{\text{कर्ण}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{समोरची बाजू}}{\text{लगतची बाजू}}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{समोरची बाजू}}$$

$\operatorname{cosec} \theta$  हे  $\sin \theta$  च्या उलट आहे.

$$\sec \theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लगतची बाजू}}$$

$\sec \theta$  हे  $\cos \theta$  च्या उलट आहे.

$$\cot \theta = \frac{\text{लगतची बाजू}}{\text{समोरची बाजू}}$$

$\cot \theta$  हे  $\tan \theta$  च्या उलट आहे.

त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांमधील परस्परसंबंध

cosec, sec आणि cot या गुणोत्तरांच्या व्याख्यांवरून,

$$\frac{1}{\sin \theta} = \text{cosec } \theta \text{ साइन गुणोत्तराचे व्यस्त गुणोत्तर.} \quad \therefore \sin \theta \times \text{cosec } \theta = 1$$

$$\frac{1}{\cos \theta} = \text{sec } \theta \text{ कॉस गुणोत्तराचे व्यस्त गुणोत्तर.} \quad \therefore \cos \theta \times \text{sec } \theta = 1$$

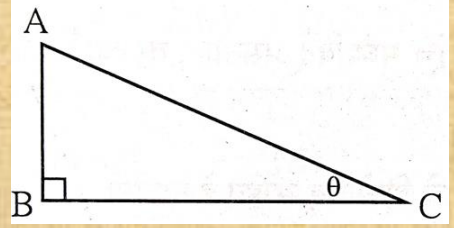
$$\frac{1}{\tan \theta} = \text{cot } \theta \text{ टेन गुणोत्तराचे व्यस्त गुणोत्तर.} \quad \therefore \tan \theta \times \text{cot } \theta = 1$$

उदा. (1) जर  $\sin \theta = \frac{7}{25}$  तर  $\cos \theta$  व  $\tan \theta$  किंमती काढा.

उकल :  $\sin \theta = \frac{7}{25}$

$$\sin \theta = \frac{AB}{AC}$$

$\therefore AB=7k, AC=25k$  आणि  $BC=x$  मानू,



$\Delta ABC$  मध्ये पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार ,

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\therefore (7k)^2 + (x)^2 = (25k)^2$$

$$\therefore 49k^2 + x^2 = 625k^2$$

$$\therefore x^2 = 625k^2 - 49k^2$$

$$\therefore x^2 = 576k^2$$

$\therefore x = 24k$ .....( दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन.)

$$\cos \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{24K}{25K} = \frac{24}{25}$$

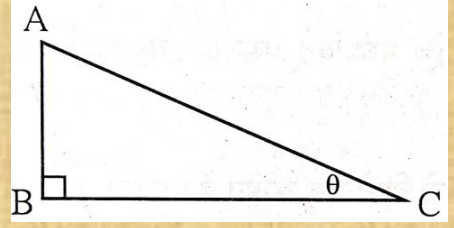
$$\tan \theta = \frac{AB}{BC} = \frac{7K}{24K} = \frac{7}{24}$$

$$\cos \theta = \frac{24}{25} \text{ व } \tan \theta = \frac{7}{24} \text{ आहे.}$$

उदा. (2) जर  $\tan\theta = \frac{3}{4}$  तर  $\sec\theta$  व  $\cos\theta$  च्या किंमती काढा.

उकल :  $\tan\theta = \frac{3}{4}$

आकृती वरून,  $\tan\theta = \frac{AB}{BC}$



$AB=3k$  व  $BC=4k$  आणि  $AC=x$  मानू,

$\Delta ABC$  मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार

$$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\therefore (3k)^2 + (4k)^2 = (x)^2$$

$$\therefore 9k^2 + 16k^2 = x^2$$

$$\therefore 25k^2 = x^2$$

$$\therefore x = 5k \quad \dots\dots\dots(\text{दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन.})$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

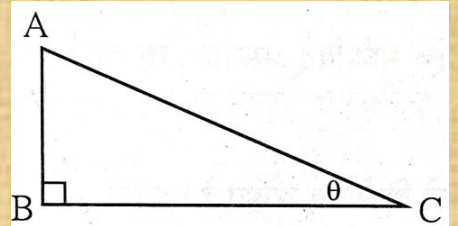
$$\sec\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{5k}{4k} = \frac{5}{4}$$

$$\sec\theta = \frac{5}{4} \text{ व } \cos\theta = \frac{4}{5} \text{ आहे.}$$

उदा. (3) जर  $\cot\theta = \frac{40}{9}$  तर  $\operatorname{cosec}\theta$  व  $\sin\theta$  च्या किंमती काढा.

उकल :  $\cot\theta = \frac{40}{9}$

आकृतीवरून,  $\cot\theta = \frac{BC}{AB}$



$\therefore BC = 40k, AB = 9k$  आणि  $AC = x$  मानू,

$\Delta ABC$  मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\therefore (9k)^2 + (40k)^2 = (x)^2$$

$$\therefore 81k^2 + 1600k^2 = x^2$$

$$\therefore x^2 = 1681k^2$$

$$\therefore x = 41k \quad \dots\dots\dots (\text{दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन.})$$

$$\therefore AC = 41k$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{41k}{9k} = \frac{41}{9}$$

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{9k}{41k} = \frac{9}{41}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{41}{9} \text{ व } \sin\theta = \frac{9}{41} \text{ आहे.}$$

**उदा. (4) जर  $5 \sec\theta - 12 \operatorname{cosec}\theta = 0$  असेल, तर  $\sec\theta$ ,  $\cos\theta$  व  $\sin\theta$  च्या किंमती शोधा.**

**उकल :**  $5\sec\theta - 12 \operatorname{cosec}\theta = 0 \quad \dots\dots(\text{दिलेले आहे.})$

$$\therefore 5 \sec\theta = 12 \operatorname{cosec}\theta = 0$$

$$\therefore 5 \times \frac{1}{\cos\theta} = 12 \times \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\dots\dots(\because \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \text{ व } \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta})$$

$$\therefore \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{12}{5}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{12}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{समोरची बाजू}}{\text{लगतची बाजू}}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{12}{5}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$\therefore 1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \sec^2 = \sec^2 \theta \quad \therefore 1 + \frac{144}{25} = \sec^2 \theta$$

$$\therefore \frac{25+144}{25} = \sec^2 \theta$$

$$\therefore \sec^2 \theta = \frac{169}{25}$$

$$\therefore \sec \theta = \frac{13}{5} \quad \dots\dots\dots ( \text{दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन} )$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{13} \quad \therefore \cos \theta = \frac{5}{13}$$

$$\therefore \sin^2 + \cos^2 \theta = 1$$

$$\therefore \sin^2 \theta + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \sin^2 \theta + \frac{25}{169} = 1$$

$$\therefore \sin^2 \theta = 1 - \frac{25}{169}$$

$$\therefore \sin^2 \theta = \frac{169-25}{169} \quad \therefore \sin^2 \theta = \frac{144}{169}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{12}{13} \quad \dots\dots(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन )$$

$$\sec \theta = \frac{13}{5}; \quad \cos \theta = \frac{5}{13} \text{ व } \sin \theta = \frac{12}{13} \text{ आहे.}$$