

दोन चलांतील रेषीय समीकरणे

- ❖ ज्या समीकरणामध्ये दोन चलांचा उपयोग केला जातो व त्यामध्ये त्या पदाची कोटी 1 असते, ते दोन चलांतील रेषीय समीकरण होय.
- ❖ समीकरणात प्रत्येक क्रियेच्या आधी जी संख्या असते, तिला पद असे म्हणतात.
- ❖ उदाहरणामध्ये, x आणि y चल आहेत. 3 आणि 4 सहगुणक आहेत. 8 हा स्थिरांक आहे.
उदा. $3x + 4y = 8$ या समीकरणाचा विचार करूया.
 $3x$, $4y$ आणि 8 ही पदे आहेत.

दोन चलांतील रेषीय समीकरणे -

ज्या समीकरणामध्ये दोन चलांचा उपयोग केला जातो व त्यामध्ये त्या पदाची कोटी 1 असते, ते दोन चलांतील रेषीय समीकरण होय.

उदा. $3x + 4y = 8$

उदाहरणामध्ये, x आणि y चल आहे. 3 आणि 4 सहगुणक आहेत. 8 हा स्थिरांक आहे.

- ❖ समीकरणाला दोन बाजू असतात.

$$5x + 3y = 9$$

डावी बाजू = उजवी बाजू या बाजूमुळे समीकरण तोलता येते.

समीकरणाच्या डाव्या बाजूत एक मिळवला तर, उजव्या बाजूत पण एक मिळवावा लागतो. समीकरणाच्या डाव्या बाजूतून एक कमी केला तर, उजव्या बाजूतून पण एक कमी करावा लागतो, याला समीकरण संतुलित करणे असे म्हणतात...

- ❖ **समीकरण सोडवताना लक्षात ठेवण्यासाठी चिन्हांचे नियम :-** (गुणाकार व भागाकार)

$$(+) \times (+) = +$$

$$(-) \times (-) = +$$

$$(+) \times (-) = -$$

$$(-) \times (+) = -$$

- ❖ **बेरीज व वजाबाकी करताना लक्षात ठेवण्यासाठी नियम :-**

चिन्हे समान असतील तर संख्याची बेरीज करावी आणि समान चिन्ह द्यावे.

उदा. $4 + 3 = 7$

$$-4 - 7 = -11$$

जर चिन्हे समान नसतील तर संख्याची वजाबाकी करावी व मोठ्या संख्येचे चिन्ह द्यावे.

उदा. $-4 + 3 = -1$

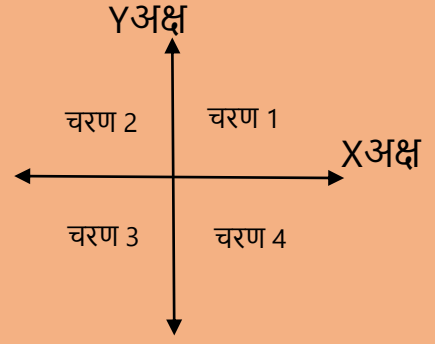
$$+4 - 3 = 1$$

❖ एकसामयिक समीकरणे सोडवताना विचारात घ्यावयाच्या गोष्टी : -

❖ दोन चलातील रेषीय समीकरणाचा आलेख : -

x आणि y अक्षाची ओळख -

x अक्षावर ऋण आणि धन या दोन्ही संख्या असतात, तसेच y अक्षावर सुद्धा ऋण आणि धन संख्या असतात.



❖ चरणांची ओळख : -

x आणि y अक्षामुळे चार भाग झाले, त्याला चरण असे म्हणतात.

चरण 1 : - (+ , +) यामध्ये नेहमी धन संख्या असतात .

चरण 2 : - (+ , -) यात धन आणि ऋण संख्या असतात.

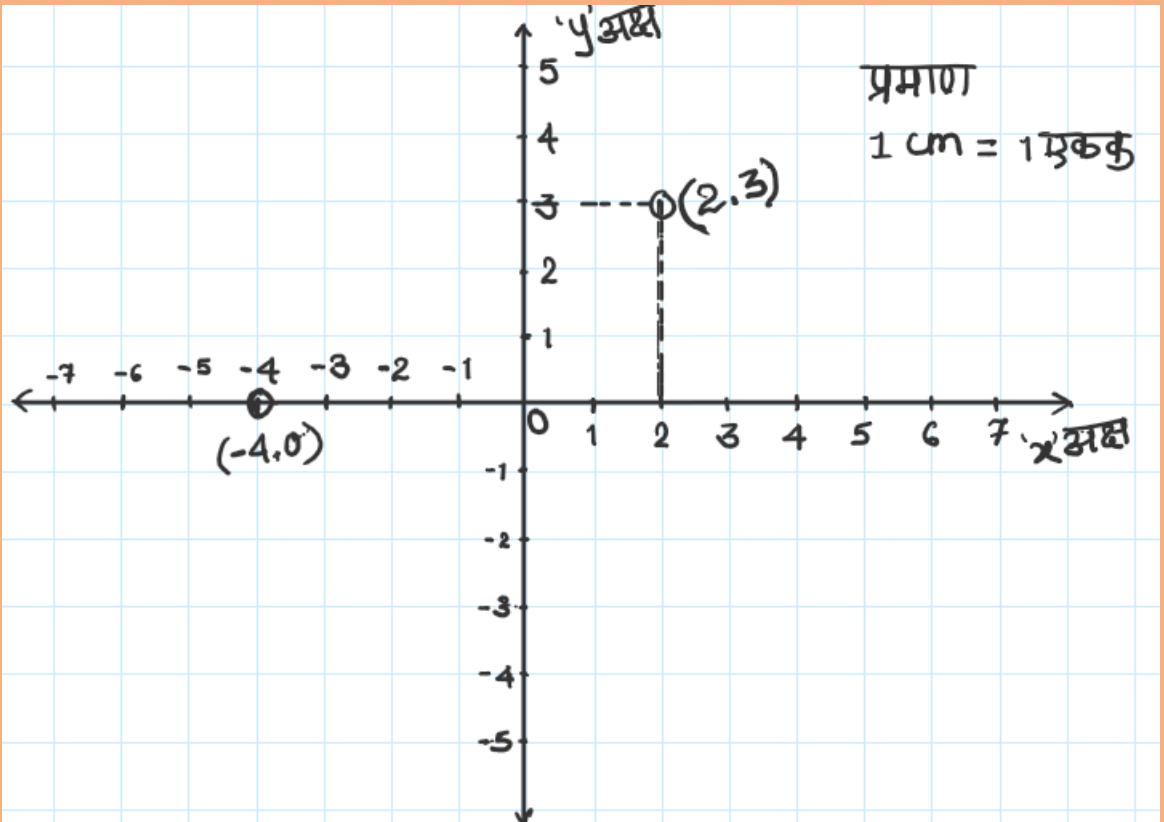
चरण 3 : - (- , -) यात फक्त ऋण संख्या असतात .

चरण 4 : - (- , +) यात ऋण आणि धन संख्या असतात.

दिलेल्या बिंदुपैकी पहिला बिंदू हा x अक्षावरती व दुसरा बिंदू y अक्षावरती असतो. म्हणजे x चे निर्देशक आधी लिहायचे आणि नंतर y चे निर्देशक लिहायचे. उदा . A (2 , - 3) यामध्ये 2 हा बिंदू x अक्षावर व -3 हा बिंदू y अक्षावर असेल . म्हणजे चरण 2 मध्ये असेल.

❖ आलेख कागदावर बिंदू स्थापन करणे.

(2 , 3) (-4 , 0)



दोन चलांतील रेषीय समीकरणे

समीकरण हा शब्द समी. असा ही लिहिला जातो हे लक्षात असू द्यावे.

$$15x + 17y = 21, 17x + 15y = 11$$

वरील उदाहरणामध्ये x आणि y या चलांच्या सहगुणकांची अदला बदल दिसते.

$$15x + 17y = 21 \text{-----} (1) \text{ समी. एकाखाली एक मांडून घ्या.}$$

$$17x + 15y = 11 \text{-----} (2) \text{ आणि त्यांना नाव द्या जसे समी. (1) व (2)}$$

या दोन्ही समीकरणाची बेरीज करावी लागेल.

$$\begin{array}{r} 15x + 17y = 21 \\ + 17x + 15y = 11 \\ \hline 32x + 32y = 32 \end{array}$$

तिन्ही ठिकाणी 32 हीच संख्या आली त्यामुळे समी. खूप मोठे दिसते त्यासाठी आपल्याला 32 घालवायचे आहेत.

$$\frac{32x}{32} + \frac{32y}{32} = \frac{32}{32}$$

$$x + y = 1 \text{-----} (3) \text{ हे समी. मिळाले याला (3) असे नाव द्या. अशाच पद्धतीने आपल्याला दुसरे समीकरण हवे आहे.}$$

$$15x + 17y = 21 \text{ समी. एकाखालील एक मांडून घेऊया.}$$

$$17x + 15y = 11$$

चौथे समीकरण मिळविण्यासाठी दिलेल्या समीकरणाची आता वजाबाकी करूया.

समी. (1) मधून समी. (2) वजा करूया.

$$\begin{array}{r} 15x + 17y = 21 \\ 17x + 15y = 11 \\ \hline -2x + 2y = 10 \end{array}$$

समीकरणाची वजाबाकी करताना प्रत्येक पदाचे चिन्ह बदलावे लागते.

इथे प्रत्येक पदाचे धन चिन्ह आहे म्हणजे आपल्याला वजाबाकी करण्यासाठी ऋण चिन्ह द्यावे लागेल. चिन्ह देत असताना चिन्हा खाली चिन्ह द्यावे.

$$\frac{-2x}{2} + \frac{2y}{2} = \frac{10}{2}$$

मिळालेले समीकरण आणखी सोपे करण्यासाठी समीकरणाच्या प्रत्येक पदाला 2 ने भागू.

$$-x + y = 5 \text{-----} (4) \text{ याला समी. (4) हे नाव देऊ.}$$

$$x + y = 1 \text{-----} (3) \text{ मिळालेले समी. एकाखाली एक मांडून घेऊ.}$$

$$-x + y = 5 \text{ -----(4)}$$

$$x + y = 1 \text{ ----- (3)}$$

आता आपल्याला कोणतेही एक चल घालवायचे आहे.

$-x + y = 5$ ----- (4) आपल्याला माहित आहे की, विरुद्ध चिन्ह असेल तर त्या चलाचा लोप होतो म्हणजे ते कमी होते.

समीकरणाचे निरीक्षण करा-

दोन्ही समीकरणाचा विचार केला तर x या चलाचे विरुद्ध चिन्ह दिसत आहे, याचा अर्थ दोन्ही समीकरणांची बेरीज करावी लागेल.

$$\begin{array}{r} + x + y = 1 \text{ -----(3)} \\ - x + y = 5 \text{ -----(4)} \end{array} \quad \text{समी. (3) व (4) ची बेरीज करू.}$$

$$\begin{array}{r} 2y = 6 \\ y = \frac{6}{2} \\ y = 3 \end{array}$$

2 आणि y मध्ये गुणाकाराचा संबंध आहे. बरोबर चिन्हापलीकडे गेल्यानंतर 2 भागिले होते.

$y = 3$ ही किंमत कोणत्याही समीकरणात ठेवता येते, परंतु आपल्या ज्या समीकरणात फक्त बेरीज आहे अशा समीकरणात ठेवली तर समीकरण सोडवण्यासाठी जास्त सोपे जाते.

$y = 3$ ही किंमत समी. (3) मध्ये ठेवू.

$$x + y = 1 \text{ -----(3)}$$

$$x + 3 = 1$$

$$x = 1 - 3$$

$$x = -2$$

y च्या ऐवजी 3 घेतले.

- ❖ x ची किंमत काढायची आहे, म्हणून x तसाच ठेवला आणि $3 =$ चिन्हा पलीकडे घेतले.
- ❖ 3 धन आहे = चिन्हा पलीकडे गेल्यानंतर ऋण होते.

$(x, y) = (-2, 3)$ ही या समीकरणाची उकल आहे.

खालील एकसामयिक समीकरण क्रेमर पद्धतीने सोडवा.

$$5x + 3y = -11 ; 2x + 4y = -10$$

हे समीकरण पहिले एकाखाली एक मांडून घेऊया.

$$5x + 3y = -11$$

$$2x + 4y = -10$$

प्रत्येक पदाला एक नाव देऊया.
या पद्धतीने आपल्याला D , Dx , Dy च्या किंमती काढायच्या आहेत.

a = 5x , 2x ; b = 3y , 4y ; c = -11, -10 या प्रमाणे आहे.

$$D \text{ काढण्यासाठी } D \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

$$Dx \text{ काढण्यासाठी } Dx \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - b_1 c_2$$

$$Dy \text{ काढण्यासाठी } Dy \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - c_1 a_2$$

वरील सूत्रानुसार आपण D , Dx , Dy च्या किंमती काढूया.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad a_1 = 5 , a_2 = 2 ; b_1 = 3 , b_2 = 4$$

तिरकस गुणाकार
करायचा असतो.

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (5 \times 4) - (3 \times 2)$$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (5 \times 4) - (2 \times 3) \\ = 20 - 6 \\ = 14$$

दोन सहगुणकाचा तिरकस गुणाकार मांडून
घेऊन मध्ये वजाबाकी चिन्ह घ्या त्यानंतर दुसऱ्या
सहगुणकाचा गुणाकार लिहा.

$$D = 14$$

अशाच पद्धतीने Dx आणि Dy काढूया.

$$Dx = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad c_1 = -11, c_2 = -10, b_1 = 3, b_2 = 4$$

$$\begin{aligned} Dx &= \begin{vmatrix} -11 & 3 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = (-11 \times 4) - (3 \times (-10)) \\ &= -44 - (30) \\ &= -44 + 30 \\ &= -14 \end{aligned}$$

$$Dx = -14$$

$$\begin{aligned} Dy &= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad a_1 = 5, a_2 = 2, c_1 = -11, c_2 = 2 \\ &= \begin{vmatrix} 5 & -11 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = (5 \times (-10)) - (2 \times (-11)) \\ &= (-50) - (-22) \\ &= -50 + 22 \\ &= -28 \end{aligned}$$

$$Dy = -28$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{Dx}{D} \\ &= \frac{-14}{14} \\ &= -1 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{Dy}{D} \\ &= \frac{-28}{14} \\ &= -2 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

$(x,y) = (-1,-2)$ ही दिलेल्या समीकरणाची उकल आहे.

दोन चलांतील रेषीय समीकरणाचा आलेख :-

$$x + y = 6; x - y = 4$$

दोन चलांतील रेषीय समीकरणाचा आलेख काढण्यासाठी नेहमी आधी सारणी तयार करावी लागते. x आणि y च्या किंमती काढून आपल्याला त्यांच्या क्रमिक जोड्या मिळतात.

$$x + y = 6$$

x	3	4	2
y	3	2	4
(x,y)	(3,3)	(4,2)	(2,4)

$$x - y = 4$$

x	6	5	7
y	2	1	3
(x,y)	(6,2)	(5,1)	(7,3)

- ❖ यानुसार समीकरणाची सारणी तयार करून घेऊ. आलेख काढण्यासाठी कमीत कमी तीन क्रमिक जोड्या मिळवाव्या लागतात.
- ❖ $x + y = 6$ या समीकरणाच्या क्रमिक जोड्या काढूया.
- ❖ $x + y = 6$ हे समीकरण सोडवताना x आणि y च्या किंमती दिलेल्या नसतात. आपल्याला कोणत्याही एका चलाची किंमत मनाने घ्यावी लागते. किंमत घेत असताना समीकरणाची डावी बाजू आणि उजवी बाजू लक्षात घेऊन किंमत घेऊया. निर्देशक बिंदू मिळवण्यासाठी x व y च्या किंमती लहान असतील तर आलेख पेपर वर व्यवस्थित आलेख काढता येतो आणि सोडवायला सोपे जाते.
- ❖ $x + y = 6$ सोडवण्यासाठी $x = 3$ घेऊया.
- ❖ समीकरणात जिथे x आहे तिथे 3 ही किंमत ठेऊया.

$$3 + y = 6$$

$$y = 6 - 3$$

$$y = 3$$

एक क्रमित जोडी $(x, y) = (3, 3)$ मिळाली
 $x = 3$ असेल, तेव्हा $y = 3$

$$x = 4 \text{ असताना}$$

$$x + y = 6 \text{ वरील प्रमाणे सोडवूया.}$$

$$4 + y = 6$$

$$y = 6 - 4$$

$$y = 2$$

$x = 4$ असताना $y = 2$
 $(x, y) = (4, 2)$

$$\begin{aligned}x + y &= 6 \\2 + y &= 6 \\y &= 6 - 2 \\y &= 4\end{aligned}$$

$x = 2$ ही किंमत x च्या जागेवर ठेवू

$$\begin{aligned}x &= 2 \text{ असताना } y = 4 \\(x, y) &= (2, 4)\end{aligned}$$

$x - y = 4$ या समीकरणाचे निर्देशक काढूया.

या समीकरणात y ची किंमत घेणे सोपे जाईल y हे $-y$ आहे म्हणून ती किंमत घेणे सोयीचे होईल.

$$\begin{aligned}x - y &= 4 \\x - 2 &= 4 \\x &= 4 + 2 \\x &= 6\end{aligned}$$

$y = 2$ ही किंमत y च्या जागेवर ठेवू

$$\begin{aligned}y &= 2 \text{ असताना } x = 6, \\(x, y) &= (6, 2)\end{aligned}$$

$y = 1$ घेऊ

$$\begin{aligned}x - y &= 4 \\x - 1 &= 4 \\x &= 4 + 1 \\x &= 5\end{aligned}$$

y च्या ऐवजी 1 ही किंमत ठेवू

$$\begin{aligned}y &= 1 \text{ असताना } x = 5, \\(x, y) &= (5, 1)\end{aligned}$$

$y = 3$ असताना

$$\begin{aligned}x - y &= 4 \\x - 3 &= 4 \\x &= 4 + 3 \\x &= 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= 3 \text{ असताना } x = 7, \\(x, y) &= (7, 3)\end{aligned}$$

आलेल्या निर्देशक बिंदूवरून आपण आलेख काढू शकतो.