

5. निर्देशक भूमिती

संख्यारेषेवरील दोन बिंदूतील अंतर कसे काढतात ? हे आपल्याला माहित आहे.

बिंदू P, Q आणि R यांचे निर्देशक अनुक्रमे -1, -5 आणि 4 आहेत.

$P=-1, Q=-5, R=4$ आहेत. अंतर काढण्यासाठी दोन बिंदू आवश्यक आहेत.

आपल्याला अंतर काढायचे आहे. म्हणून दोन बिंदूंच्या मध्ये वजाबाकीचा संबंध असतो.

जसे;

$$d(P, Q) = (-1) - (-5) = -1 + 5 = 4 \text{ आणि}$$

$$d(Q, R) = 4 - (-5) = 4 + 5 = 9$$

P, Q आणि R प्रस्थापित केलेले बिंदू आहेत. आणि $P=-1, Q=-5, R=4$ हे बिंदूंचे निर्देशक आहेत.

बिंदूंचे निर्देशक घेत असताना आधी x अक्षावरील निर्देशक घ्यायचे. त्यानंतर y अक्षावरील निर्देशक घ्यायचे. उदाहरणामध्ये यानुसारच निर्देशक दिलेले असतात. म्हणून आपण पहिला निर्देशक आधी लिहतो. (x अक्षाचा)

हिच संकल्पना वापरून आपण XY प्रतलातील, एकाच अक्षावर असणाऱ्या दोन बिंदूतील अंतर काढू.

एकाच अक्षावरील दोन बिंदूतील अंतर काढणे.

एकाच अक्षावरील दोन बिंदू म्हणजे एकाच संख्यारेषेवरील दोन बिंदू होत.

X अक्षाचा ऋण निर्देशक दाखवणारा भाग किरण OX' आहे व Y अक्षाचा ऋण निर्देशक दाखवणारा भाग किरण OY' आहे.

$$\text{अंतराचे सूत्र} := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

उदा. (1) P(-1, 1), Q(5, -7) या दोन बिंदूतील अंतर काढा.

उकल : P($x_1 - y_1$) आणि Q($x_2 - y_2$) मानू.

$$x_1 = -1, y_1 = 1, x_2 = 5, y_2 = -7$$

$$\begin{aligned} \text{अंतराचे सूत्रानुसार } d(P, Q) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{[5 - (-1)]^2 + [(-7) - 1]^2} \\ &= \sqrt{(6)^2 + (-8)^2} \\ &= \sqrt{36 + 64} \\ &= \sqrt{100} \end{aligned}$$

$$d(P, Q) = 10$$

∴ बिंदू P आणि Q मधील अंतर 10

उदा. (2) P (6, 3), Q (3, -7) आणि R(3,3) हे बिंदू एकरेषीय आहेत का ते ठरवा.

उकल : PQ = $\sqrt{[6 - 3]^2 + (-6 + 7)^2}$ (अंतराचे सूत्र वापरून)

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(3)^2 + (1)^2} \\ &= \sqrt{10} \quad \text{..... (I)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} QR &= \sqrt{(3 - 3)^2 + (-7 - 3)^2} \\ &= \sqrt{(0)^2 + (-10)^2} \\ &= \sqrt{100} \quad \text{..... (II)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PR &= \sqrt{(3 - 6)^2 + (3 + 6)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (9)^2} \\ &= \sqrt{9 + 81} \\ &= \sqrt{90} \quad \text{..... (III)} \end{aligned}$$

(I), (II) आणि (III) वरून $\sqrt{10}$, $\sqrt{100}$ आणि $\sqrt{90}$ यांपैकी $\sqrt{100}$ ही सर्वात मोठी संख्या आहे. ($\sqrt{100}$) आणि ($\sqrt{10} + \sqrt{90}$) या संख्या समान आहेत का ते पाहू.

यासाठी $(\sqrt{100})^2$ आणि $(\sqrt{10} + \sqrt{90})^2$ यांची तुलना करा.

त्यावरून तुमच्या लक्षात येईल $(\sqrt{10} + \sqrt{90}) > \sqrt{100}$

$\therefore PQ + PR \neq QR$

$\therefore P(6,-6), Q(3,-7)$ आणि $R(3,3)$ हे एकरेषीय नाहीत.

उदा. (3) $P(2,-2), Q(7, 3), R(11,-1)$ आणि $S(6,- 6)$ हे शिरोबिंदू असलेला चौकोन समांतरभुज आहे हे दाखवा.

उकल : समांतरभुज चौकोनात समुख बाजूंची लांबी समान असते व कर्ण असमान असतात.

$$\begin{aligned}PQ &= \sqrt{(7 - 2)^2 + [3 - (-2)]^2} \\&= \sqrt{(5)^2 + (3 + 2)^2} \\&= \sqrt{(5)^2 + (5)^2} \\&= \sqrt{25 + 25} \\&= \sqrt{50} \\&= \sqrt{25 \times 2} \\&= 5\sqrt{2} \quad \text{.....(1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}QR &= \sqrt{(11 + 7)^2 + (-1 - 3)^2} \\&= \sqrt{(4)^2 + (-4)^2} \\&= \sqrt{16 + 16} \\&= \sqrt{32} \\&= \sqrt{16 \times 2} \\&= 4\sqrt{2} \quad \text{.....(2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
RS &= \sqrt{(6 - 11)^2 + [-6 - (-1)]^2} \\
&= \sqrt{(-5)^2 + (-6 + 1)^2} \\
&= \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} \\
&= \sqrt{25 + 25} \\
&= \sqrt{50} \\
&= \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2} \quad \text{..... (3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
PS &= \sqrt{(6 - 2)^2 + [-6 - (-2)]^2} \\
&= \sqrt{(4)^2 + (-6 + 2)^2} \\
&= \sqrt{(4)^2 + (-4)^2} \\
&= \sqrt{16 + 16} \\
&= \sqrt{32} \\
&= \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2} \quad \text{..... (4)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
PR &= \sqrt{(11 - 2)^2 + [-1 - (-2)]^2} \\
&= \sqrt{(9)^2 + (-1 + 2)^2} \\
&= \sqrt{(9)^2 + (1)^2} \\
&= \sqrt{(9)^2 + (1)^2} \\
&= \sqrt{81 + 1} = \sqrt{82} \quad \text{..... (5)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SQ &= \sqrt{(6 - 7)^2 + [-6 - (-3)]^2} \\
&= \sqrt{(-1)^2 + (-6 + 3)^2} \\
&= \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} \\
&= \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \quad \text{..... (6)}
\end{aligned}$$

(1), (2), (3), (4), (5) व (6) वरून,

$PQ=RS$ व $QR=PS$

या चौकोनाच्या संमुख बाजू असून समान लांबीच्या आहेत. (7)

$PR \neq SQ$

PR व SQ हे कर्ण असमान लांबीचे आहेत. (8)

(7) व (8) वरून,

∴ $P(2,-2)$, $Q(7,3)$, $R(11,-1)$ आणि $S(6,-6)$ हे शिरोबिंदू असलेला चौकोन समांतरभुज आहे.

उदा. (4) जर P बिंदू हा $A(-1, 7)$ आणि $B(4,-3)$ यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचे 2:3 या गुणोत्तरात विभाजन करीत असेल, तर P बिंदूचे निर्देशक काढा.

उकल : दिलेल्या उदाहरणात $(x_1, y_1) = (-1, 7)$ आणि $(x_2, y_2) = (4, -3)$ मानू तसेच $m : n = 2 : 3$.

समजा P बिंदूचे निर्देशक (x, y) आहेत.

∴ रेषाखंडाच्या विभाजनाच्या सूत्रानुसार,

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} \text{ आणि } y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

$$\therefore x = \frac{2 \times 4 + 3 \times (-1)}{2+3} \text{ आणि } y = \frac{2 \times (-3) + 3 \times 7}{2+3}$$

$$\therefore x = \frac{8-3}{5} \text{ आणि } y = \frac{-6+21}{5}$$

$$\therefore x = \frac{5}{5} = 1 \text{ आणि } y = \frac{15}{5} = 3$$

∴ P बिंदूचे निर्देशक $(1, 3)$ आहेत.

उदा. (5) (22, 20) आणि (0, 16) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक काढा.

उकल : समजा, (22, 20)=(x_1, y_1), (0,16)=(x_2, y_2) आणि मध्याबिंदूचे निर्देशक

(x, y) मानू.

रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूच्या सूत्रानुसार,

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} \quad \text{व} \quad y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

$$x = \frac{22+0}{2} \quad \text{व} \quad y = \frac{20+16}{2}$$

$$\therefore x = \frac{22}{2} \quad \text{व} \quad y = \frac{36}{2}$$

$$\therefore x = 11 \quad \text{व} \quad y = 18$$

\therefore (22, 20) आणि (0, 16) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक (11, 18) आहेत.