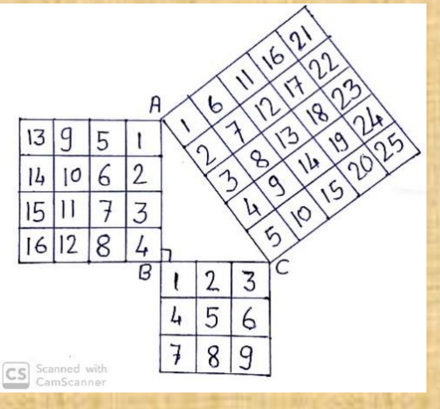
पायथागोरसचे प्रमेय

पायथागोरसच्या प्रमेयाचा संबंध हा काटकोन त्रिकोणाशी असतो. त्रिकोणाच्या तिन्ही कोनाच्या मापांची बेरीज 180^0असते. त्रिकोणाच्या एका कोनाचे माप 90^0 असणाऱ्या त्रिकोणाला काटकोन त्रिकोण म्हणतात. **90^0 कोनासमोरील बाजूला कर्ण म्हणतात.** काटकोन त्रिकोणाला पाया, उंची आणि कर्ण या तीन बाजू असतात.या तिन्ही पैकी जर कोणत्याही दोन बाजूंची लांबी दिली असेल, तर तिसऱ्या बाजूची लांबी काढता येते. 90^0 माप असलेल्या त्रिकोणाच्या तिसऱ्या बाजूची लांबी काढण्यासाठी पायथागोरसच्या प्रमेयाचा उपयोग होतो. पायथागोरसचे प्रमेय आपल्याला पुढीलप्रमाणे सांगता येईल.



ΔABC मध्ये, $\angle B=90^0$ आहे. म्हणून ΔABC हा काटकोन त्रिकोण आहे. त्रिकोणाची बाजू AB ही उंची, बाजू BC हा पाया आणि बाजू AC कर्ण आहे.

AB=3 सेमी, BC=4 सेमी आणि AC=5सेमी. येथे आपल्याला प्रत्येक बाजूंच्या लांबीचा वर्ग करायचा आहे. त्यासाठी प्रत्येक बाजूंच्या लांबीला त्याच संख्येने गुणावे लागेल.

$\therefore\ 4\times4+3\times3=5\times5$

$\therefore\ 4^2+3^2=5^2$

पाया^{2}+उंची^{2}=कर्ण^2

$\therefore\ BC^2+AB^2=AC^2$

$\therefore\ AC^2=BC^2+AB^2$ ....(पायथागोरसचे प्रमेय)

पायथागोरसचे त्रिकुट :

तीन नैसर्गिक संख्यांच्या जोडीला त्रिकुट म्हणतात. नैसर्गिक संख्यांच्या त्रिकुटामध्ये जर मोठ्या संख्येचा वर्ग हा इतर दोन संख्यांच्या वर्गांच्या बेरजेएवढा असेल, तर त्यालाच पायथागोरसचे त्रिकुट असे म्हणतात. पायथागोरसच्या त्रिकुटामध्ये कोणतीही संख्या कोणत्याही क्रमाने लिहिता येते.

उदा. (5, 12, 13) या संख्यांच्या त्रिकुटामध्ये,

$5^2=5\times5=25$

$12^2=12\times12=144$

$13^2=13\times13=169$

आणि $25+144=169$

या ठिकाणी मोठ्या संख्येचा वर्ग इतर दोन संख्यांच्या वर्गांच्या बेरजेएवढा आहे.

$\therefore$ (5,12,13) हे पायथागोरसचे त्रिकुट आहे.

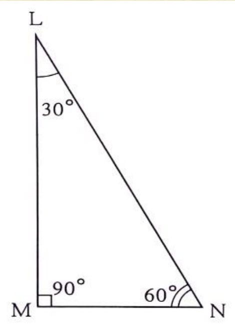
कोनांची मापे $30^0-60^0-90^0$ असणाऱ्या त्रिकोणाचा गुणधर्म :

काटकोन त्रिकोणामध्ये लघुकोन 30^0 व 60^0 असतील तर 30^0 मापाच्या कोनासामोरील बाजू कर्णाच्या $\frac{1}{2}$ पट म्हणजेच निम्मी असते. व 60^0 मापाच्या कोनासामोरील बाजू कर्णाच्या $\frac{\sqrt{3}}{2}$ पट असते.

सूत्र : 30^0 कोनासामोरील बाजू$=\frac{1}{2}\times$कर्ण

60^0 कोसामोरील बाजू$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times$कर्ण

उदा. ΔLMN मध्ये, $\angle L=30^0$, $\angle N=60^0$, $\angle M=90^0$, जर $LN=6$ सेमी असेल, तर MN व LM काढा.



उकल $\therefore$ 30^0 कोनासामोरील बाजू = $\frac{1}{2}\times$कर्ण, 60^0 कोनासमोरील बाजू = $\frac{\sqrt{3}}{2}\times$ कर्ण

$\therefore$ $MN=\frac{1}{2}\times LN$

$=\frac{1}{2}\times 6$

$= 3$ सेमी

$LM=\frac{\sqrt{3}}{2}\times LN$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6$

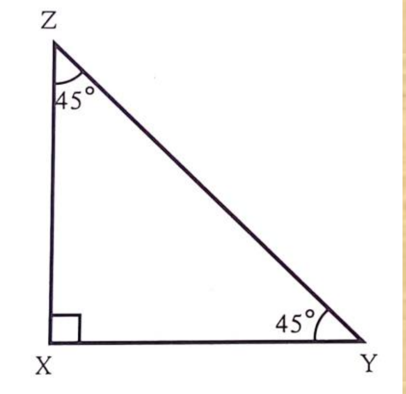
$= 3\sqrt{3}$ सेमी

कोनांची मापे 45^0–45^0–90^0 असणाऱ्या त्रिकोणाचा गुणधर्म :

बाजू ZX = बाजू XY

$\angle Z=45^0$ आणि $\angle Y=45^0$

$\therefore$ $\angle Z \cong \angle Y$



सूत्र : 45^0 कोनासामोरील बाजू = $\frac{1}{\sqrt{2}}\times$कर्ण

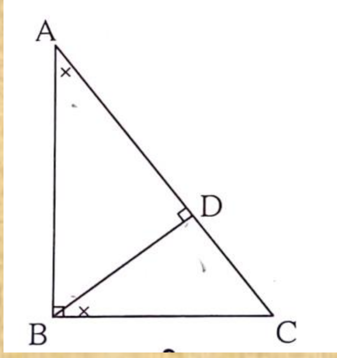
Δ XYZ मध्ये, जर $ZY=3\sqrt{2}$ सेमी

$XY=ZX=\frac{1}{\sqrt{2}}\times 3\sqrt{2}$

$\therefore$ $XY=ZX=3$ सेमी

ज्या काटकोन त्रिकोणाचे लघुकोन 45^0 व 45^0 मापाचे असतील, तर काटकोन करणारी प्रत्येक बाजू ही कर्णाच्या $\frac{1}{\sqrt{2}}$ पट असते.

समरूपता आणि काटकोन त्रिकोण



प्रमेय : काटकोन त्रिकोणात कर्णावर टाकलेल्या शिरोलंबामुळे जे त्रिकोण तयार होतात ते मूळ काटकोन त्रिकोणाशी व परस्परांशी समरूप असतात.

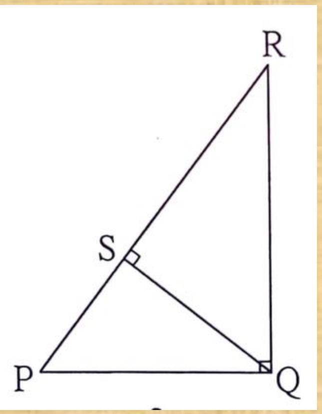
$\therefore$ $\Delta ADB \sim \Delta BDC \sim \Delta ABC$

भूमितीमध्याचे प्रमेय

काटकोन त्रिकोणात कर्णावर टाकलेला शिरोलंब, त्या शिरोलंबामुळे होणाऱ्या कर्णाच्या दोन भागांचा भूमितीमध्य असतो.

$QS^2 = PS \times SR$

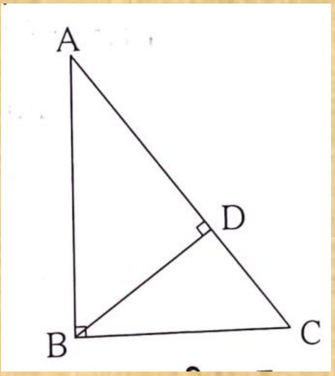
$\therefore \; QS = \sqrt{PS \times SR}$



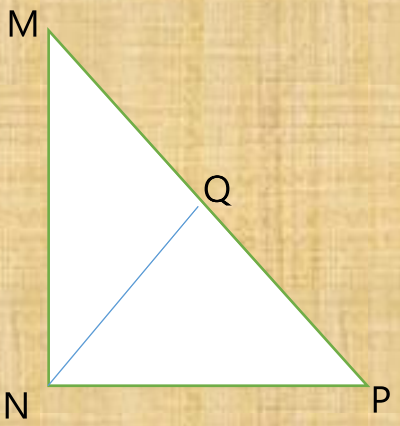
पायथागोरसचे प्रमेय

काटकोन त्रिकोणात कर्णाचा वर्ग हा इतर दोन बाजूंच्या वर्गाच्या बेरजेइतका असतो.

$AC^2 = AB^2 + BC^2$



उदा. (1) आकृतीमध्ये, $\angle MNP = 90^\circ$ $NQ \perp$ रेख MP, $MQ = 9$, $QP = 4$, तर NQ काढा.



उकल : ΔMNP मध्ये

रेख $NQ \perp$ रेख MPआणि M-Q-P.

शिरोलंब NQ हा, कर्ण MP चे रेख MQ व

रेख PQ असे दोन भाग करतो.

$\therefore$ भूमितीमध्याच्या प्रमेयानुसार

$NQ^2 = MQ \times PQ$

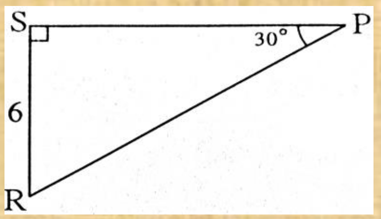
$\therefore NQ^2 = 9 \times 4$ .... (दिलेल्या किंमती भरून)

$\therefore NQ^2 = 36$

$\therefore NQ = 6$ .... (दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

NQ=6 आहे.

उदा. (2) PSR मध्ये दिलेल्या माहितीमध्ये RP आणि PS काढा.



उकल : ΔPSR मध्ये,

$\angle p = 30°$ .... (दिलेले आहे.)

$\angle S = 90°$ .... (दिलेले आहे.)

$\therefore \angle R = 60°$ .... (त्रिकोणाचा उरलेला कोन.)

$\therefore \Delta PSR$ हा 30°-60°-90° मापाचा त्रिकोण आहे.

30°-60°-90° त्रिकोणाच्या प्रमेयानुसार

$SR = \frac{1}{2} PR$ .... (30° कोनासमोरील बाजू)

$\therefore 6 = \frac{1}{2} PR$

$\therefore PR = 6 \times 2$

$= 12$

तसेच, $PS = \frac{\sqrt{3}}{2} \times PR$ .... (60° कोनासमोरील बाजू)

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12$ ....(PR ची किंमत ठेवून.)

$= 6\sqrt{3}$

$PR = 12$ आणि $PS = 6\sqrt{3}$ आहे.

उदा. (3) समद्विभूज काटकोन त्रिकोणाची बाजू x आहे, तर त्याच्या कर्णाची लांबी काढा.

उकल : समद्विभूज काटकोन त्रिकोणातील कोनांची मापे 45°, 45°व 90°अशी आहेत.

45°-45°-90° त्रिकोणाच्या प्रमेयानुसार,

समद्विभूज काटकोन त्रिकोणाच्या बाजूंची लांबी

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times$कर्णाची लांबी

$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{2}} \times$ कर्णाची लांबी

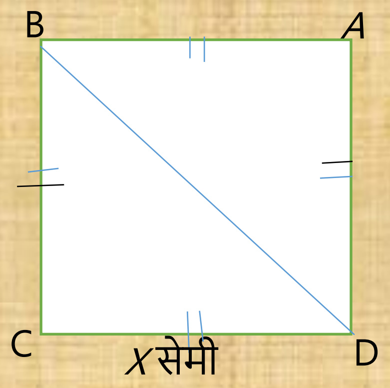
$\therefore$ कर्णाची लांबी $= \sqrt{2X}$

कर्णाची लांबी $= \sqrt{2X}$ आहे.

उदा. (4) एका चौरसाचा कर्ण 10 सेमी आहे, तर त्याच्या बाजूची लांबी व परिमिती काढा.

उकल : चौरस ABCD हा इष्ट चौरस मानू,

चौरसाचा प्रत्येक कोन काटकोन व सर्व भुजा एकरूप असतात.



समजा, चौरसाच्या बाजूची लांबी x सेमी आहे.

$\angle B = 90°$

$\therefore \Delta ABC$ या काटकोन त्रिकोणात,

पायथागोरसाच्या प्रमेयावरून,

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\therefore \quad x^2 + x^2 = (10^2)$$

$$\therefore \quad 2X^2 = 100$$

$$\therefore \quad X^2 = \frac{100}{2}$$

$$\therefore \quad x^2 = 50$$

$$\therefore \quad X = \sqrt{50}$$

$$\therefore \quad x = \sqrt{25 \times 2}$$

$$\therefore \quad X = \sqrt{25 \times 2}$$

$$\therefore \quad X = 5\sqrt{2}$$

$\therefore$ चौरसाच्या बाजूची लांबी $= 5\sqrt{2}$ सेमी

चौरसाची परिमिती $= 4 \times$ बाजू

$= 4 \times 5\sqrt{2}$

$= 20\sqrt{2}$ आहे.

चौरसाच्या बाजूंची लांबी $= 5\sqrt{2}$ सेमी व चौरसाची परिमिती $= 20\sqrt{2}$ सेमी आहे.