

वर्गसमीकरणे

आपण फाउंडेशन कोर्समध्ये बहुपदी म्हणजे काय ? व समीकरणे म्हणजे काय ? याचा अभ्यास केला. बहुपदीचे कोटीवरून होणारे प्रकार आपण अभ्यासले.

रेषीय बहुपदी : ज्या बहुपदीची कोटी एक असते तिला "रेषीय बहुपदी" म्हणतात.

उदा. $5x + 9, 3x - 7$.

वर्ग बहुपदी : ज्या बहुपदीची कोटी दोन असते, तिला वर्ग बहुपदी म्हणतात.

उदा. $5x^2, 3x^2 - 5x, x^2 + 3x - 5$.

आता आपण वर्ग बहुपदीची किंमत 0 घेऊन जे समीकरण मिळते त्याचा अभ्यास करू. अशा समीकरणाला वर्गसमीकरण म्हणतात. आपण दैनंदिन जीवनात अनेक वेळा या वर्गसमीकरणाचा वापर करतो.

उदा. संकेतने 200 चौ.मी. क्षेत्रफळचा एक आयाताकृती भूखंड खरेदी केला. भूखंडाची लांबी ही त्याच्या रुंदीपेक्षा १० मी जास्त होती. तर त्या भूखंडाची लांबी व रुंदी किती होती ?

समजा, भूखंडाची रुंदी x मीटर आहे.

∴ लांबी = $(x + 10)$ मीटर. (10 ने जास्त आहे.)

आयाताकृती भूखंडाचे क्षेत्रफळ = लांबी \times रुंदी

∴ $200 = (x + 10) \times x$

∴ $200 = x^2 + 10x$

म्हणजे, $x^2 + 10x = 200$

∴ $x^2 + 10x - 200 = 0$

आता हे वर्गसमीकरण सोडवून आपण भूखंडाची लांबी व रुंदी ठरवू शकतो.

ज्या एका चलातील समीकरणात सर्व घातांक पूर्ण संख्या असून चलाचा मोठ्यात मोठा घातांक 2 असतो ते वर्गसमीकरण असते. $ax^2 + bx + c = 0$ हे वर्गसमीकरणाचे सामान्य रूप आहे.

या मध्ये a, b, c या वास्तव संख्या असून a ही शून्येतर संख्या असते.

$ax^2 + bx + c = 0$ या स्वरूपातील समीकरणास वर्गसमीकरणाचे सामान्य रूप म्हणतात.

खालील समीकरणापैकी वर्गसमीकरणे कोणती ते ठरवा.

$3x^2 + 5x - 3 = 0$ यामध्ये x हे एकच चल असून चलाचा सर्वात मोठा घातांक 2 आहे. म्हणून हे समीकरण वर्गसमीकरण आहे.

$$(m+2)(m-5)=0$$

$$m^2 + 2m - 5m - 10 = 0$$

(याला सोडवले तर आपल्याला खालील समीकरण मिळते.)

$m^2-3m-10=0$ या समीकरणामधे m हे एकच चल असून चलाचा सर्वात मोठा घातांक 2 आहे.

खालील समीकरणे $ax^2+bx+c=0$ या स्वरूपात लिहा. प्रत्येकातील a,b,c च्या किंमती ठरवा.

$$\diamond 2y=10-y^2$$

$$y^2+2y-10=0$$

$$a=1 \quad b=2 \quad c=10$$

$$\diamond m^2-9=0$$

$$m^2-0m-9=0$$

$$a=1 \quad b=0 \quad c=-9$$

वर्गसमीकरणाचे मूळ (उकली)

x ची a ही किंमत घेऊन बहुपदीची किंमत शून्य येत असेल, तर $(x-a)$ हा त्या बहुपदीचा अवयव असतो. म्हणजे $p(x)$ ही बहुपदी असेल आणि $p(a)=0$ असेल तर $(x-a)$ हा $p(x)$ चा अवयव असतो. या स्थितीत a ही $p(x)=0$ ची एक उकल आहे. किंवा a हे $p(x)=0$ चे एक मूळ आहे असे म्हणतात.

उदा. x^2+5x-6 या बहुपदीत $x=-6$ ठेवून

$$x^2+5x-6=(6)^2+5(-6)-6$$

$$=36-30-6$$

$$=36-36=0$$

म्हणून $x=-6$ ही x^2+5x-6 या समीकरणाची एक उकल आहे, म्हणजेच -6 हे $x^2+5x-6=0$ या समीकरणाचे एक मूळ आहे.

वर्गसमीकरणासमोर दिलेल्या चलाच्या किंमती त्या समीकरणाची मूळे आहेत की नाही ते ठरवा.

$$x^2+4x-5=0 \quad x=1, -1$$

$$\therefore (1)^2+4(1)-5=0$$

$$\therefore 1+4-5=0$$

$$\therefore 5-5=0$$

डावी बाजू = उजवी, $x=1$ हे वर्गसमीकरणाचे मूळ आहे

$$x = -1$$

$$x^2+4x-5=0$$

$$= (-1)^2+4(-1)-5$$

$$= -8$$

डावी बाजू \neq उजवी बाजू

$x=-1$ हे वर्ग समीकरणाचे मूळ नाही.

अवयव पद्धतीने मूळ काढणे.

वर्ग बहुपदीचे अवयव पाडण्याच्या दोन पद्धती : जर दोन संख्यांचा गुणाकार शून्य असेल तर त्या दोन संख्यांपैकी किमान एक संख्या शून्य असते.

उदा.(1) $X^2 - 4x - 5 = 0$
 $\therefore X^2 - 5x + 1x - 5 = 0$
 $\therefore x(x-5) + 1(x-5) = 0$
 $\therefore (x-5)(x+1) = 0$
 $\therefore x = 5$ किंवा $x = -1$
 \therefore दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मूळे 5 आणि -1 आहेत.

उदा.(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$
 $\therefore m^2 - 13m - 1m + 13 = 0$
 $\therefore m(m-13) - 1(m-13) = 0$
 $\therefore (m-13)(m-1) = 0$
 $\therefore m-13=0$ किंवा $m-1=0$
 $\therefore m=13$ किंवा $m=1$
 \therefore दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मूळे 13 आणि 1 आहेत.

वर्गसमीकरण सोडवण्याचे सूत्र :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a \neq 0$$

$ax^2 + bx + c = 0$ या समीकरणातील a, b, c यांच्या किमती

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

या राशीत लिहून

राशीला सोपे रूप दिले, की समीकरणाच्या उकली मिळतात. म्हणून

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

याला वर्गसमीकरण सोडवण्याचे सूत्र म्हणतात. या दोन उकलींपैकी कोणतीही उकल कोणत्याही अक्षराने दाखवली तरी चालते.

òòòò सोडवलेली उदाहरणे òòòò

सूत्राचा उपयोग करून खालील वर्गसमीकरण सोडवा.

उदा.(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$

उकल : $m^2 - 14m + 13 = 0$ ची

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 1, b = -14, c = 13,$

$\therefore b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \times 1 \times 13$

$= 196 - 52$

$= 144$

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-14) \pm \sqrt{144}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{14 \pm 12}{2}$$

$$\therefore m = \frac{14+12}{2} \quad \text{किंवा} \quad m = \frac{14-12}{2}$$

$$\therefore m = \frac{26}{2} \quad \text{किंवा} \quad m = \frac{2}{2}$$

$m = 13$ किंवा $m = 1$

\therefore वर्गसमीकरणाची मुळे 13 आणि 1 आहेत.

वर्गसमीकरणाचे उपयोजन;

दोन क्रमागत नैसर्गिक संख्या $x, (x+2)$

$X^2 - 15x + 54 = 0$ आपल्याला शेवटच्या पदाचे असे अवयव पडायचे आहेत, की त्या अवयवांची बेरीज -15 आली पाहिजे आणि ज्याचा गुणाकार +54 पाहिजे.

मागील पाठात गुणाकाराचे नियम आपण पहिले.

$-10 - 5 = -15 \quad 10 \times 5 = 50$

$-8 - 7 = -15 \quad 8 \times 7 = 56$

$-9 - 6 = -15 \quad 9 \times 6 = 54$

$X^2 - 5x + 54 = 0$ येथे -15 च्या ऐवजी आपल्याला जे अवयव मिळाले ते लिहूया.

$x^2 - 9x - 6x + 54 = 0$

$x^2 - 9x - 6x + 54 = 0$ या दोन पदांच्या जोड्या करूया.

$x(x-9) - 6(x-9) = 0$ समीकरणाची किंमत न बदलता याचे अवयव काढायचे आहेत.

$(x-9)(x-6) = 0$ सारखे असणारे कंस एकदाच घ्यायचे.

$x-9=0$ असेल किंवा $x-6=0$ असेल.

$x-9=0$ असेल तर $x-6=0$

$x=9$ किंवा $x=6$

दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे 9 आणि 6 आहेत.

वर्गसमीकरणाची सामान्य रूपाशी तुलना करून a, b, c च्या किंमती लिहा.

$x^2 - 7x + 5 = 0$ या समीकरणाची $ax^2 + bx + c = 0$ या सामान्य रूपाशी तुलना करूया.

आपल्याला माहित आहे की जिथे सहगुणक दिलेला नसेल तिथे 1 सहगुणक असतो.

$$x^2 - 7x + 5 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

म्हणजे $a=1, b=-7, c=5$ आहे.

असे लिहिल्यास तुलना
करायला सोपे जाते.

खालील समीकरण सूत्र पद्धतीने सोडवा.

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a=1, b=6, c=5$$

सामान्य रूपाशी तुलना

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\therefore 6^2 - 4 \times 1 \times 5$$

$$= 36 - 20 = 16$$

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-6 \pm 4}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-6+4}{2} \text{ किंवा } = \frac{-6-4}{2}$$

$$= \frac{-2}{2} \text{ किंवा } = \frac{-10}{2}$$

$$X = -1 \text{ किंवा } x = -5$$

$$\begin{aligned}
 x^2 + 7x - 1 &= 0 \\
 ax^2 + bx + c &= 0 \\
 a=1, b=7, c=-1 \\
 \sqrt{b^2 - 4ac} \\
 &= 7^2 - 4 \times 1 \times (-1) \\
 &= 49 + 4 \\
 &= 53
 \end{aligned}$$

तुलना करून

उदा. दोन क्रमागत नैसर्गिक संख्यांच्या वर्गाची बेरीज 244 आहे, तर त्या संख्या शोधा.

उकल: पहिली संख्या x मानू

दुसरी संख्या $x+2$ मानू

$$x^2 + (x+2)^2 = 244$$

$(x+2)^2$ या कंसाला आधी सोडवू.

$(x+2)^2$ याचा अर्थ $(x+2)(x+2)$ असा आहे.

$$(x+2)(x+2) = x^2 + 2x + 2x + 4$$

$$= x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 244 \quad \text{दोन्ही राशी एकत्र लिहू.}$$

$$2x^2 + 4x + 4 = 244$$

$$2x^2 + 4x = 244 - 4$$

$$2x^2 + 4x = 240$$

$$2x^2 + 4x - 240 = 0$$

$$\frac{2x^2}{2} + \frac{4x}{2} - \frac{240}{2} = 0$$

प्रत्येक पदाला 2 ने भागूया म्हणजे आपल्याला छोटे समीकरण मिळेल आणि पहिल्या पदाचा सहगुणक निघून जाईल.

$$x^2 + 2x - 120 = 0$$

$$x^2 + 12x - 10x - 120 = 0$$

$$x(x+12) - 10(x+12) = 0$$

$$(x+12)(x-10) = 0$$

$$x+12=0 \quad \text{किंवा} \quad x-10=0$$

$x = -12$ किंवा $x = 10$ येथे आपण धन संख्या विचारात घेऊ.

$x = 10$ ही पहिली सम संख्या मिळाली.

दुसरी संख्या $x+2$ आहे म्हणून,

$(x+2)$ म्हणजे

$(10+2) = 12$ दुसरी सम संख्या मिळाली.

पहिली संख्या = 10 आणि

दुसरी संख्या = 12