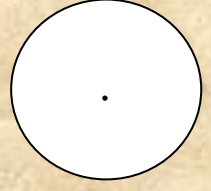
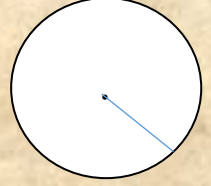


3. वर्तुळ

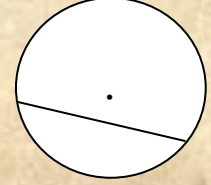
- एखाद्या बिंदूपासून समान अंतरावर असणाऱ्या बिंदूच्या संचाला वर्तुळ असे म्हणतात.



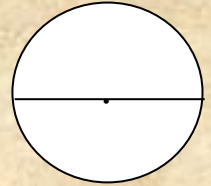
- वर्तुळाच्या केंद्रबिंदूपासून वर्तुळावरील कोणत्याही बिंदूला जोडणाऱ्या रेषेला त्रिज्या म्हणतात. वर्तुळाला अनंत त्रिज्या काढता येतात.



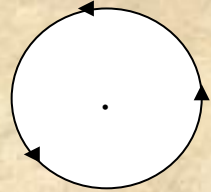
- जीवा: वर्तुळावरील दोन बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषेला जीवा म्हणतात.



- वर्तुळ केंद्रामधून जाणाऱ्या जीवेस व्यास असे म्हणतात.
- व्यास हा त्रिज्येच्या दुप्पट असतो.

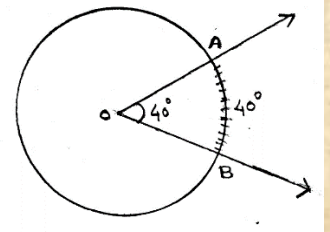


- परीघ एखाद्या बिंदूपासून पुन्हा त्याच बिंदूपर्यंत काढलेली रेषा म्हणजे परीघ होय.

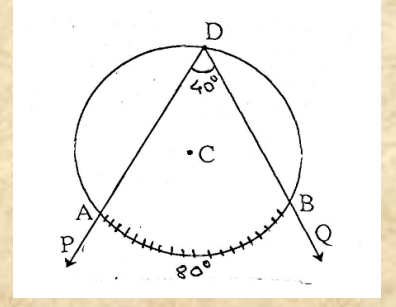


- अंतर्लिखित कोन आणि अंतर्खंडित कंस :

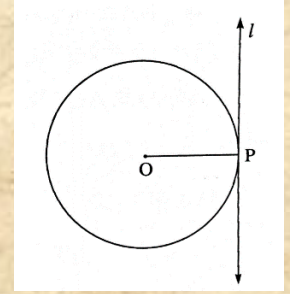
केंद्रीय कोनाचे माप त्याने अंतर्खंडित केलेल्या कंसा एवढे असते.



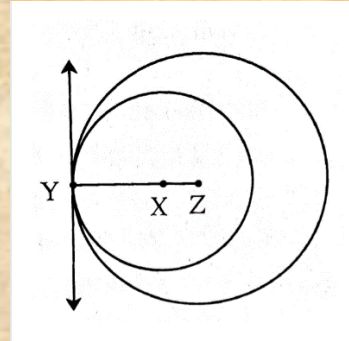
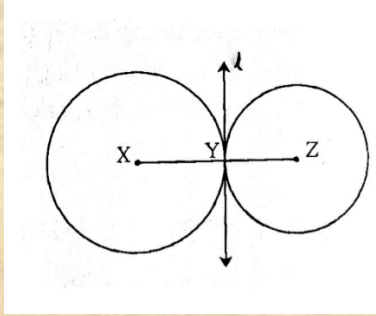
- वर्तुळावर अंतर्लिखित कोनाचे माप त्याने जो कंस अंतर्खंडित केला आहे, त्याच्या निम्मे असते.



- स्पर्शिका :- वर्तुळाला एकाच बिंदूत छेदणाऱ्या रेषेला स्पर्शिका म्हणतात.
- वर्तुळावरील बिंदूतून वर्तुळाला एकच स्पर्शिका काढता येते.

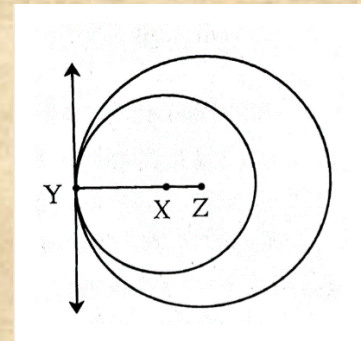


- स्पर्श वर्तुळे :- परस्परांना स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांचा स्पर्श बिंदू त्या वर्तुळाचे केंद्रबिंदू जोडणाऱ्या रेषेवर असतो.

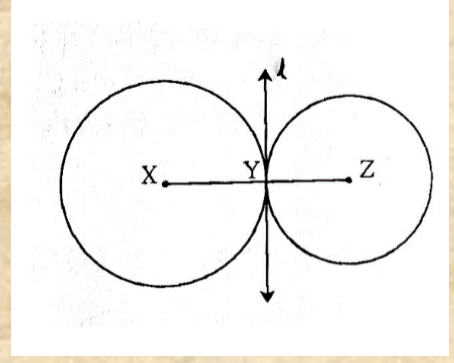


- अंतर्स्पर्शी वर्तुळे :- अंतर्स्पर्शी वर्तुळांच्या केंद्रातील अंतर त्यांच्या त्रिज्यातील फरकाएवढे असते.

- केंद्रातील अंतर = मोठ्या वर्तुळाची त्रिज्या - लहान वर्तुळाची त्रिज्या

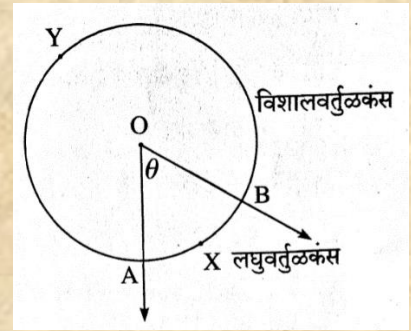


- बाह्यस्पर्शी वर्तुळे :- बह्यस्पर्शी वर्तुळांच्या केंद्रातील अंतर त्यांच्या त्रिज्यांच्या बेरेजे एवढे असते.
- वर्तुळाचे स्पर्श बिंदू आणि केंद्रबिंदू हे एकरेषीय आहेत.



केंद्रातील अंतर = मोठ्या वर्तुळाची त्रिज्या + लहान वर्तुळाची त्रिज्या

वर्तुळाचे माप:



- पूर्ण वर्तुळाचे माप 360° असते.
- केंद्रीय कोन :- वर्तुळ केंद्रातून जाणाऱ्या कोनाला केंद्रीय कोन असे म्हणतात.
- विशालकंस :- वृत्तछेदिकेच्या ज्या बाजूला वर्तुळ केंद्र असते त्या बाजूच्या कंसाला विशालकंस असे म्हणतात आणि विरुद्ध बाजूच्या कंसाला लघुकंस असे म्हणतात.
- दिलेल्या आकृतीमध्ये कंस AYB हा विशालकंस आहे आणि कंस AXB हा लघुकंस आहे.
- आकृतीमध्ये केंद्रीय कोन AOB माप θ आहे म्हणून लघुकंस AXB चे माप θ आहे.
- लघुकंसाचे माप त्याच्या संगत केंद्रीय कोनाच्या मापाएवढे असते.
- विशालकंसाचे माप = 360° - संगत लघुकंसाचे माप

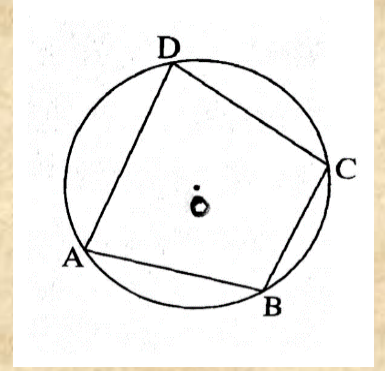
- अंतर्लिखित कोन प्रमेय:- वर्तुळात अंतर्लिखित केलेल्या कोनाचे माप त्याने अंतर्खंडित केलेल्या कंसाच्या मापाच्या निम्मे असते.

$$\angle ABC = \frac{1}{2} m(\text{कंस } ADC)$$

लघुकंसाचे माप त्याच्या संगत केंद्रीय कोनाच्या मापाएवढे असते.

म्हणून $m(\text{कंस } ABC) \sim \angle AOC$

$$\angle ABC = \frac{1}{2} m(\text{कंस } ADC)$$



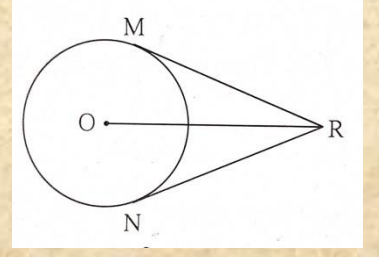
- चक्रीय चौकोनाचे प्रमेय: चक्रीय चौकोनाचे संमुख कोन परस्परांचे पूरक कोन असतात. चौकोनाच्या सर्व कोनाच्या मापांची बेरीज 360° असते.

$$\text{म्हणजे, } \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$$

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$$

उदा. (1) शेजारील आकृतीत, केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या बह्यभागातील R या बिंदूपासून काढलेले RM आणि RN हे स्पर्शिकाखंड वर्तुळाला बिंदू M आणि N मध्ये स्पर्श करतात.



जर $OR=10$ सेमी व वर्तुळाची त्रिज्या 5 सेमी असेल तर –

- 1) प्रत्येक स्पर्शिकाखंडाची लांबी काढा.
- 2) $\angle MRO$ चे माप किती?

उकल : येथे त्रिज्या= $OM=ON=5$ सेमी

$OR=10$ सेमी

1) MR व NR हे स्पर्शिकाखंड आहेत.

$\therefore MR \cong NR$ (स्पर्शिकाखंडाचे प्रमेय)

\therefore काटकोन $\triangle OMR$ मध्ये

$OR^2 = OM^2 + MR^2$ (पायथागोरसचे प्रमेय)

$10^2 = 5^2 + MR^2$ (किमती ठेवून)

$100 = 25 + MR^2$

$100 - 25 = MR^2$

$75 = MR^2$

$\therefore MR = \sqrt{75}$ (वर्गमुळे घेऊन)

$\therefore MR = \sqrt{25 \times 3}$

$\therefore MR = 5\sqrt{3}$ सेमी

$\therefore MR = NR = 5\sqrt{3}$

\therefore प्रत्येक स्पर्शिकाखंडाची लांबी= $5\sqrt{3}$ सेमी.

2) $\triangle OMR$ मध्ये,

$OM=5$, $OR=10$

$OM = \frac{1}{2} \times OR$

$\angle MRO=30^\circ$

($30^\circ-60^\circ-90^\circ$ प्रमेयाच व्यत्यास)

उदा. (2) दोन अंतर्स्पर्शी वर्तुळाच्या त्रिज्या अनुक्रमे 3.5 सेमी व 4.8 सेमी आहेत, तर त्यांच्या केंद्रातील अंतर किती आहे.

उकल : समजा लहान वर्तुळाची त्रिज्या $r_1=3.5$ सेमी

मोठ्या वर्तुळाची त्रिज्या $r_2=4.8$ सेमी

अंतर्स्पर्शी वर्तुळांच्या केंद्रातील अंतर त्यांच्या त्रिज्यांतील फरकाएवढे असते.

$$\therefore \text{केंद्रातील अंतर} = r_1 - r_2 \quad (r_1 > r_2)$$

$$= 4.8 - 3.5$$

$$= 1.3 \text{ सेमी}$$

\therefore केंद्रातील अंतर 1.3 सेमी आहे.

उदा. (3) बाह्यस्पर्शी असलेल्या दोन वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 5.5 सेमी व 4.2 सेमी असतील तर त्यांच्या केंद्रातील अंतर किती असेल?

उकल : समजा मोठ्या वर्तुळाची त्रिज्या $r_1= 4.2$ सेमी

लहान वर्तुळाची त्रिज्या $r_2= 5.5$ सेमी

बाह्यस्पर्शी वर्तुळांच्या केंद्रातील अंतर त्यांच्या त्रिज्यांच्या बेरजेएवढे असते.

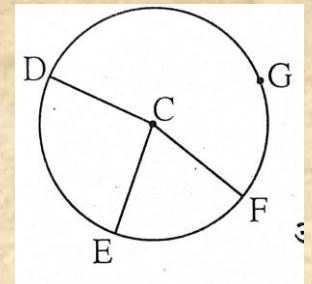
$$\therefore \text{केंद्रातील अंतर} = r_1 + r_2$$

$$= 5.5 + 4.2$$

$$= 9.7 \text{ सेमी}$$

\therefore केंद्रातील अंतर 9.7 सेमी आहे.

उदा. (4) आकृतीमध्ये केंद्र, C असलेल्या वर्तुळावर G, D, E आणि F हे बिंदू आहेत. $\angle ECF$ चे माप 70° आणि कंस DGF चे माप 200° असेल, तर कंस DE आणि कंस DEF यांची मापे ठरवा.



उकल : $m(\text{कंस EF}) = \angle ECF = 70^\circ$

\therefore लघुकंसाचे माप त्याचा केंद्रीय कोणाच्या मापाएवढे असते.

$$m(\text{कंस DE}) + m(\text{कंस EF}) + m(\text{कंस DGF}) = 360^\circ$$

$$m(\text{कंस DE}) + 70^\circ + 200^\circ = 360^\circ$$

$$m(\text{कंस DE}) + 270^\circ = 360^\circ$$

$$m(\text{कंस DE}) = 360^\circ - 270^\circ$$

$$\therefore m(\text{कंस DE}) = 90^\circ$$

$$m(\text{कंस DEF}) = m(\text{कंस DE}) + m(\text{कंस EF})$$

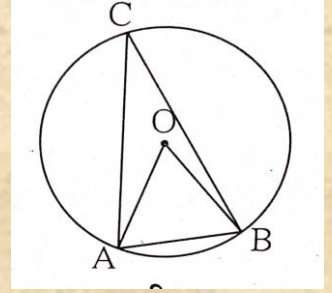
$$= 90^\circ + 70^\circ$$

$$\therefore m(\text{कंस DEF}) = 160^\circ$$

उदा. (5) आकृतीमध्ये केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या जीवा AB ची लांबी वर्तुळाच्या त्रिज्येएवढी आहे. तर

(1) $\angle AOB$ (2) $\angle ACB$ (3) कंस AB आणि (4)

कंस ACB यांची मापे काढा.



उकल : 1) रेख OA = रेख OB (एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या)
जीवा AB ची लांबी वर्तुळाच्या त्रिज्येएवढी आहे.

$$\therefore \text{रेख OA} \cong \text{रेख OB} \cong \text{AB}$$

$\therefore \triangle OAB$ समभुज त्रिकोण आहे.

$$\therefore \angle AOB = 60^\circ \text{ (समभुज त्रिकोणाचा कोन)}$$

$$2) m(\text{कंस AB}) = \angle AOB$$

$$\therefore m(\text{कंस AB}) = 60^\circ$$

$$\angle ACB = \frac{1}{2} m(\text{कंस AB}) \text{ अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)}$$

$$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2} \times 60^\circ$$

$$\angle ACB = 30^\circ$$

3) $m(\text{कंस AB}) = \angle AOB$ (लघुकंसाचे माप त्याच्या संगत केंद्रीय कोनाच्या मापासमान असते.)

$$\therefore m(\text{कंस AB}) = 60^\circ$$

$$4) m(\text{कंस ACB}) + m(\text{कंस AB}) = 360^\circ$$

$$m(\text{कंस ACB}) + 60^\circ = 360^\circ$$

$$= 360^\circ - 60^\circ$$

$$m(\text{कंस ACB}) = 300^\circ$$