# संभाव्यता

10 मित्र आहेत. त्यांचा पार्टीचा बेत आहे, परंतु पार्टी कोण देणार? यासाठी ते सर्व एक युक्ती करतात. एका डब्यात 10 चिठ्ठ्या ठेवतात. त्यामध्ये फक्त एकाच चिठ्ठीत पार्टी हा शब्द लिहिलेला असतो. बाकी 9 चिठ्ठ्या कोऱ्या असतात. ज्याच्याकडे पार्टी शब्द लिहिलेली चिठ्ठी येणार तो पार्टी देईल. यावर जास्तीत जास्त मित्र बोलू लागले की,आम्ही पहिली चिठ्ठी उचलू किंवा शेवटची चिठ्ठी उचलू. याचे कारण असे की,पहिली चिठ्ठी कोरी असण्याची **शक्यता फारच जास्त आहे,** कारण डब्यात कोऱ्या चिठ्ठ्या जास्त असल्यामुळे पार्टी शब्द लिहिलेली चिठ्ठी डब्यात असण्याची शक्यता जास्त आहे. यामुळे आमच्यावर पार्टी देण्याची वेळ येणार नाही. शेवटच्या वेळी चिठ्ठी अगोदरच उचलली गेली असल्यामुळे डब्यात चिठ्ठी असण्याची **शक्यता फारच कमी** आहे. त्यामुळे आमच्यावर पार्टी देण्याची वेळ येणार नाही.

वरील गोष्टीत शक्यता कमी किंवा जास्त असण्याचा विचार झाला आहे.

आपण आपल्या रोजच्या जीवनात कदाचित, बहुतेक, 50-50, संभाव्यता, जवळपास, अशक्य अशा भविष्यातील शक्यता वर्तवणाऱ्या शब्दांचा वापर करत असतो.

जसे-

- भारत आणि पाकिस्तानचा क्रिकेट सामना भारत जिंकणार की पाकिस्तान जिंकणार?
- निश्चितच जिओ चे नेटवर्क ग्रामीण भागात उत्तम असेल.
- कदाचित आज सर वर्गावर येणार नाही.
- आज पाऊस येण्याची संभावना जास्त आहे.
- या वेळेला BJP निवडून येण्याची शक्यता जास्त आहे.

प्रश्न: नाण्याला किती आणि कोणकोणत्या बाजू असतात?
उत्तर :- नाण्याला दोन बाजू असतात. छापा (Head) आणि काटा(Tail).

प्रश्न: एक नाणे एकाच वेळी फेकले तर किती आणि कोणत्या शक्यता आहेत ?
उत्तर :- एक नाणे एकाच वेळी फेकले, तेव्हा दोनच फलिते मिळण्याच्या शक्यता आहेत, छापा(H) आणि काटा(T).

| शक्यता | छापा H | काटा T |
|---|---|---|

प्रश्न : दोन नाणी एकाच वेळी फेकली,तर कोणकोणत्या शक्यता आहेत ?
उत्तर : दोन नाणी एकाच वेळी फेकली तेव्हा HH, HT, TH, TT ही फलिते मिळण्याच्या शक्यता आहेत.

| शक्यता | H H | H T | T H | TT |
|---|---|---|---|---|

याचप्रमाणे तीन नाणी एकाच वेळी फेकली, तेव्हा अशी 8 फलिते मिळण्याची शक्यता आहेत. ती तुम्ही स्वतः करून बघा.

तसेच एक फासा (लुडो) एकाच वेळी फेकला तेव्हा 1 किंवा 2 किंवा 3 किंवा 4 किंवा 5 किंवा 6 अशी 6 फलिते मिळण्याच्या शक्यता आहेत.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|

**यादृच्छिक प्रयोग –**

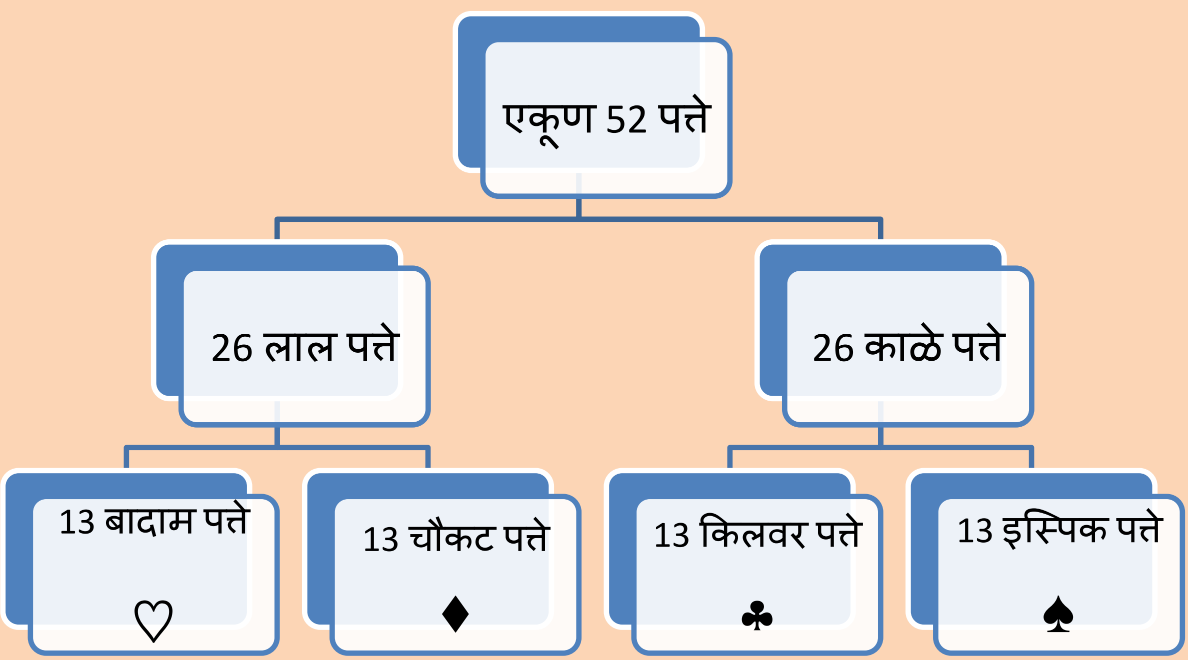
ज्या प्रयोगात सर्व संभाव्य फलिते अगोदर माहीत असतात, पण त्यापैकी कोणत्याही फलितांपैकी निश्चितपणे आपण सांगू शकत नाही. सर्व फलिते सत्य असण्याची शक्यता समान असते, अशा प्रयोगाला यादृच्छिक प्रयोग म्हणतात. जसे नाणे फेकणे, फासा फेकणे, 1 ते 50 संख्या लिहिलेल्या कार्डच्या संचातून एक कार्ड काढणे, योग्य रितीने पिसलेल्या खेळाच्या पत्त्यातून एक पत्ता काढणे इत्यादी.

**निष्पत्ती –**

यादृच्छिक प्रयोगाच्या फलितालाच निष्पत्ती म्हणतात.

उदा-

1) एक नाणे फेकणे या यादृच्छिक प्रयोगात छाप (H) किंवा काटा (T) या दोनच निष्पत्ती शक्य आहेत.
२) एक फासा फेकणे या यादृच्छिक प्रयोगात 6 निष्पत्ती शक्य आहेत.
3) 1 ते 50 संख्या लिहिलेल्या या कार्डाच्या संचातून एक कार्ड काढणे, या प्रयोगात 50 निष्पत्ती शक्य आहेत.
4) योग्य रीतीने पिसालेल्या खेळातील पत्त्यामधून एक पत्ता काढणे या प्रयोगात 52 निष्पत्ती शक्य असतात. परंतु या पत्त्यांमध्ये विविध प्रकारची पत्ते असतात त्यामुळे यांची निष्पत्ती वेगवेगळी येणार आहे. ती खालीलप्रमाणे -




26 पत्ते लाल (13 बदाम पत्ते आणि 13 चौकट पत्ते )
26 पत्ते काळे (13 किलवर पत्ते आणि 13 इस्पिक पत्ते )
असे एकूण 52 पत्ते असतात.

पत्त्यांच्या कॅटमध्ये चौकट, बदाम किलवर आणि इस्पिक असे चार संच असतात आणि प्रत्येक संचात 13–13 पत्ते असतात. **राजा, राणी आणि गुलाम यांना चित्रयुक्त पत्ते म्हणतात**. प्रत्येक कॅटमध्ये राजाच्या चित्राचे 4, राणीच्या चित्राचे 4 आणि गुलामाच्या चित्राचे 4 असे 12 चित्रयुक्त पत्ते असतात.

## नमुना अवकाश (Sample Space)

यादृच्छिक प्रयोगात, शक्य असणाऱ्या सर्व निष्पत्तींच्या संचाला नमुना अवकाश म्हणतात. नमुना अवकाश 'S' या अक्षराने दाखवतात. 'S' मधील एकूण घटकांची संख्या n(S) ने दर्शवतात. जर नमुना अवकाश सांत असेल तर त्याला सांत नमुना अवकाश म्हणतात. सांत नमुना अवकाशाची उदाहरणे पुढील सारणीत दिली आहे.

| अ. क्र. | यादृच्छिक प्रयोग | नमुना अवकाश | नमुना घटकांची संख्या |
|---|---|---|---|
| 1 | एक नाणे फेकणे | S = {H, T} | n(S) = 2 |
| 2 | दोन नाणी फेकणे | S = { HH, HT, TH, TT} | n(S) = $\square$ |
| 3 | तीन नाणी फेकणे | S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT} | n(S) = 8 |
| 4 | एक फासा टाकणे | S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} | n(S) = $\square$ |
| 5 | दोन फासे टाकणे | S = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),<br>(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),<br>(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),<br>(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),<br>(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),<br>(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)} | n(S) = 36 |
| 6 | 1 ते 25 संख्या लिहिलेल्या कार्डांच्या संचातून एक कार्ड काढणे. | S = {1, 2, 3, 4, .. .. ... .. .. .. .. .. .. .., 25} | n(S) = $\square$ |
| 7 | योग्य रीतीने पिसलेल्या बावन्न पत्त्यांच्या कॅट मधून एक पत्ता काढणे | चौकट : एक्का, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, गुलाम, राणी, राजा<br>इस्पिक : एक्का, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, गुलाम, राणी, राजा<br>बदाम : एक्का, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, गुलाम, राणी, राजा<br>किलवर : एक्का, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, गुलाम, राणी, राजा | n(S) = 52 |



## घटना (Event)

विशिष्ट अट पूर्ण करणाऱ्या निष्पत्तीला अपेक्षित निष्पत्ती म्हणतात.
नमुना अवकाश दिला असेल तर अपेक्षित निष्पत्तींच्या संचाला 'घटना' म्हणतात. घटना हा नमुना अवकाशाचा उपसंच असतो. या घटना इंग्रजीतील A, B, C, D यांसारख्या अक्षरांनी दर्शवतात.

उदा. दोन नाणी फेकली असता समजा A ही घटना, कमीत कमी एक काटा मिळण्याची आहे.
येथे अपेक्षित निष्पत्ती खालीलप्रमाणे,
A = {TT, TH, HT} जिथे काटा आहे ते सर्व निष्पत्ती घ्यायच्या आहेत.
घटना A मधील घटकांची संख्या n(A) ने दर्शवतात. येथे n(A) = 3.

## घटनेची संभाव्यता –

एक सोपा प्रयोग विचारात घेवू. एका पिशवीत समान आकाराचे चार चेंडू आहेत. त्यातील तीन चेंडू पांढरे व चौथा चेंडू काळा आहे. डोळे मिटून एक चेंडू काढायचा आहे. काढलेला चेंडू पांढरा असण्याची शक्यता जास्त आहे, हे सहज कळते.

**गणितीय भाषेत अपेक्षित घटनेची शक्यता दर्शवणाऱ्या संख्येला संभाव्यता असे म्हणतात.** ती पुढील सूत्र वापरून संख्येने किंवा शतमानात दर्शवतात.

एखाद्या यादृच्छिक प्रयोगासाठी नमुना अवकाश S असेल आणि A ही त्या प्रयोगासंबंधी अपेक्षित घटना असेल, तर त्या घटनेची संभाव्यता 'P(A)' अशी दर्शवतात आणि पुढील सूत्राने ठरवतात.

$$P(A) = \frac{\text{घटना 'A' मधील नमुना घटकांची संख्या}}{\text{नमुना अवकाशातील एकूण घटकांची संख्या}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

वरील प्रयोगात,'उचललेला चेंडू पांढरा असणे,' ही घटना A असेल, तर n(A)=3, कारण पांढरे चेंडू तीन आहेत आणि एकूण चेंडू चार असल्याने n(S)=4

$\therefore$ उचललेला चेंडू पांढरा असणे, यांची संभाव्यता $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$

तसेच 'उचललेला चेंडू काळा असणे' ही घटना B असेल, तर n(B)=1

$$\therefore P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{1}{4}$$

**उदा. (1)** दोन नाणी एकाच वेळी फेकणे या प्रयोगासाठी नमुना अवकाश "S" लिहा. त्यातील नमुना घटकांची संख्या n(S) लिहा. या प्रयोगासाठी खालील घटना संच स्वरुपात लिहा आणि त्यातील नमुना घटकांची संख्या लिहा.

(i) घटना A साठी अट, कमीत कमी एक छाप मिळण्याची आहे.
(ii) घटना B साठी अट, एकच छाप मिळण्याची आहे.
(iii) घटना C साठी अट, जास्तीत जास्त एक काटा मिळण्याची आहे.
(iv) घटना D साठी अट, एकही छाप न मिळण्याची आहे.

**उकल** : दोन नाणी एकाच वेळी फेकली असता,

एक-एक अट बघूया

नमुना अवकाश, S={HH,HT,TH,TT} n(S)=4

i) घटना A साठी अट कमीत कमी एक छाप मिळण्याची आहे.

A={HT,TH,HH } n(A)=3

इथे लक्षात घ्या कमीत कमी एक छाप पाहिजे दोन असेल तरी चालेल पण एक पेक्षा कमी नको.

ii) घटना B साठी अट, एकच छाप मिळण्याची.
B={ HT,TH} n(B )=2

iii) घटना C साठी अट, जास्तीत जास्त एक काटा मिळण्याची.

C={HT,TH,HH}  n(C)=3

जास्तीत जास्त एकच नसेल तरी चालेल परंतु दोन काटे नकोत .

iv) घटना D साठी अट एकही छाप न मिळण्याची.

D={TT}  n(D )=1

एकही छाप नको.

**उदा. (2)** एका आठवड्यातील वार यादृच्छिक पद्धतीने निवडायचा आहे.
एका आठवड्यात सात वार असतात. ( सोमवार, मंगळवार, बुधवार, गुरुवार, शुक्रवार, शनिवार, आणि रविवार )

आपल्याला माहित नाही नक्की कोणता वार येईल ते.

**उकल :** म्हणून S={ सोमवार,मंगळवार,बुधवार,गुरुवार,शुक्रवार,शनिवार,रविवार. }

n(s)=7

**उदा. (3)** एक फासा टाकला असता खालील प्रत्येक अट पूर्ण करणाऱ्या घटनेची संभाव्यता काढा.
i) वरच्या पृष्ठभागावर मूळ संख्या मिळणे.
ii) वरच्या पृष्ठभागावर मिळालेली संख्या सम असणे.

**उकल :** S={1, 2, 3, 4, 5, 6,}  n(S )=6

i ) घटना A: वरच्या पृष्ठभागावर मूळ संख्या मिळणे.

A={2,3,5}  n(A)=3

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$

$P(A)=\frac{3}{6}$

$=\frac{1}{2}$

**उदा. (4)** 3 मुले व 2 मुली यातून दोन विद्यार्थ्यांची वृक्षसंवर्धन समिती खालील प्रमाणे बनवायची आहे. नमुना अवकाश S व नमुना घटकाची संख्या लिहा. तसेच खालील घटना संच स्वरुपात लिहा आणि नमुना घटकांची संख्या लिहा

i) घटना A साठी अट, समितीत कमीतकमी एक मुलगी असणे.
ii) घटना B साठी अट, समितीत एक मुलगा व एक मुलगी असणे.
iii) घटना C साठी अट, समितीत फक्त मुलगे असणे.
iv) घटना D साठी अट, समितीत जास्तीतजास्त एक मुलगी असणे.

**उकल :** समजा $B_1, B_2, B_3$ हे तीन मुलगे व $G_1, G_2$ या दोन मुली आहे.
या मुला-मुलींतून दोन सभासदांची स्वच्छतासमिती बनवायची आहे.

$S=\{ B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2, G_1G_2 \}$

$n(S)=10$

i) घटना A साठी अट, समितीत कमीतकमी एक मुलगी असणे, ही आहे.
$A=\{ B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2, G_1G_2 \}$
$n(A)=7$

ii) घटना B साठी अट, समितीत एक मुलगा व एक मुलगी असणे, ही आहे.
$B=\{ B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2 \}$
$n(B)=6$

iii) घटना C साठी अट, समितीत फक्त मुलगे असणे, हीआहे.
$C=\{ B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3 \}$
$n(C) = 3$

iv) घटना D साठी अट, समितीत जास्तीतजास्त एक मुलगी असणे, ही आहे.
$D=\{ B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2 \}$
$n(D)=9$

**उदा. (4)** योग्य रीतीने पिसलेल्या 52 पत्त्यांच्या कॅट मधून एक पत्ता काढला, तर खालील घटनांची संभाव्यता काढा .

(i) तो पत्ता लाल असणे. (ii) तो पत्ता चित्रयुक्त असणे.

**उकल** : समजा, ‘S’ नमुना अवकाश आहे. $n(S)=52$

(i) घटना A: काढलेला पत्ता लाल असणे.

एकूण लाल पत्ते = 13 चौकट पत्ते + 13 बदाम पत्ते

$n(A)=26$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

(ii) घटना B : काढलेला पत्ता चित्रयुक्त असणे.

कॅटमध्ये राजा, राणी आणि गुलाम हे चित्रयुक्त पत्ते असतात. एकूण 12 चित्रयुक्त पत्ते असतात .

∴ n(B) = 12

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

**उदा. (6)** 2,3,5 या अंकापासून,अंकांची पुनरावृत्ती न करता दोन अंकी संख्या तयार करणे.

यात पहिल्या अंकापासून सुरवात करूया.

**उकल :** S=(23,25,32,35,52,53 )

एकच अंक दोनदा नाही घ्यायचा
उदा. 33 असे.