5 संभाव्यता

चला, शिकूया.

- संभाव्यता : ओळख
- यादृच्छिक प्रयोग व निष्पत्ती
- नमुना अवकाश व घटना
- घटनेची संभाव्यता

चला, चर्चा करूया.

शिक्षक : विद्यार्थी मित्रहो, आपल्या वर्गातील विद्यार्थिसंख्येएवढ्या चिठ्ठ्या या खोक्यात ठेवल्या आहेत. प्रत्येकाने एक चिठ्ठी उचलावी. चिठ्ठ्यांवर वेगवेगळ्या वनस्पतींची नावे लिहिली आहेत. कोणत्याही दोन चिठ्ठ्यांवर एकाच वनस्पतीचे नाव दिसणार नाही. 'तुळस' या वनस्पतीची चिठ्ठी कोणाला मिळते ते पाहू. सर्वजण हजेरी क्रमांकाप्रमाणे रांगेत उभे रहा. शेवटची चिठ्ठी उचलेपर्यंत कोणीही चिठ्ठी उघडून पहायची नाही.

अरुणा : सर, रांगेत मी पहिल्यांदा आहे, पण मी पहिल्यांदा चिठ्ठी उचलणार नाही कारण एवढ्या सर्व चिठ्ठ्यांतून, ती चिठ्ठी मलाच येईल याची शक्यता फार कमी आहे.

झरीना : सर, रांगेत मी सर्वांत शेवटी आहे, मी शेवटी चिठ्ठी उचलणार नाही कारण 'तुळस' हे नाव असलेली चिठ्ठी बहुधा मी उचलण्यापूर्वीच उचलली गेली असेल.

थोडक्यात पहिल्या व शेवटच्या विद्यार्थ्यांना वाटत आहे, की त्यांना तुळस हे नाव असलेली चिठ्ठी मिळण्याची शक्यता फार कमी आहे.

वरील संवादामध्ये शक्यता कमी किंवा जास्त असण्याचा विचार झाला आहे.

शक्यता वर्तवण्यासंबंधी आपण दैनंदिन संभाषणात पुढील शब्दही वापरतो.

- संभवत:
- बहुतेक
- अशक्य
- निश्चित
- जवळपास
- 50 – 50

भविष्यातील शक्यतांविषयीची खालील विधाने पाहा.

- बहुतेक आजपासून पाऊस पडेल.
- महागाई वाढण्याचा संभव खूप आहे.
- भारताला पुढील क्रिकेट सामन्यात हरवणे अशक्य आहे.
- निश्चितच मला प्रथम श्रेणी मिळणार.
- बालकाला वेळेवर पोलिओचे डोस दिले, तर त्याला पोलिओ होण्याचा संभव नसतो.

सोबतच्या चित्रात क्रिकेटच्या सामन्यासाठी नाणेफेक चालू आहे.

त्यामध्ये कोणकोणत्या शक्यता आहेत?

[ ] किंवा [ ]

म्हणजेच, नाणेफेकीची [ ] फलिते असतात.

कृती 1 : एक नाणे वर्गातील प्रत्येकाने एकदा फेकून पाहा. तुम्हांला काय आढळले?

(शिक्षक फळ्यावर खालील तक्ता तयार करतात व तो भरून घेतात.)

शक्यता	छाप (H)	काटा (T)
विद्यार्थी संख्या	. . .	. . .

कृती 2 : आता, प्रत्येकाने ते नाणे दोनदा फेकून पाहा. कोणकोणत्या शक्यता आहेत?

शक्यता	H H	HT	TH	TT
विद्यार्थी संख्या				

कृती 3 : तुमच्याजवळ असणारा फासा एकदाच फेका, वरच्या पृष्ठभागावर टिंबे येण्याच्या कोणकोणत्या शक्यता आहेत याचा विचार करा.

ही प्रत्येक शक्यता म्हणजे फासा फेकण्याचे एक - एक संभाव्य फलित आहे.

जाणून घेऊया.

यादृच्छिक प्रयोग (Random Experiment)

ज्या प्रयोगात सर्व संभाव्य फलिते अगोदर माहीत असतात, पण त्यांपैकी कोणत्याही फलिताबद्दल निश्चित भाकीत आपण करू शकत नाही, सर्व फलिते सत्य असण्याची शक्यता समान असते, अशा प्रयोगाला ‘यादृच्छिक प्रयोग’ असे म्हणतात. उदाहरणार्थ नाणे फेकणे, फासा फेकणे, 1 ते 50 संख्या लिहिलेल्या कार्डांच्या संचातून एक कार्ड काढणे, खेळातील पत्त्यांच्या योग्य रीतीने पिसलेल्या पत्त्यांमधून एक पत्ता काढणे इत्यादी.

निष्पत्ती (Outcome)

यादृच्छिक प्रयोगाच्या फलिताला 'निष्पत्ती' म्हणतात.

उदाहरणार्थ, (1) एक नाणे फेकणे या यादृच्छिक प्रयोगाच्या दोनच निष्पत्ती आहेत.

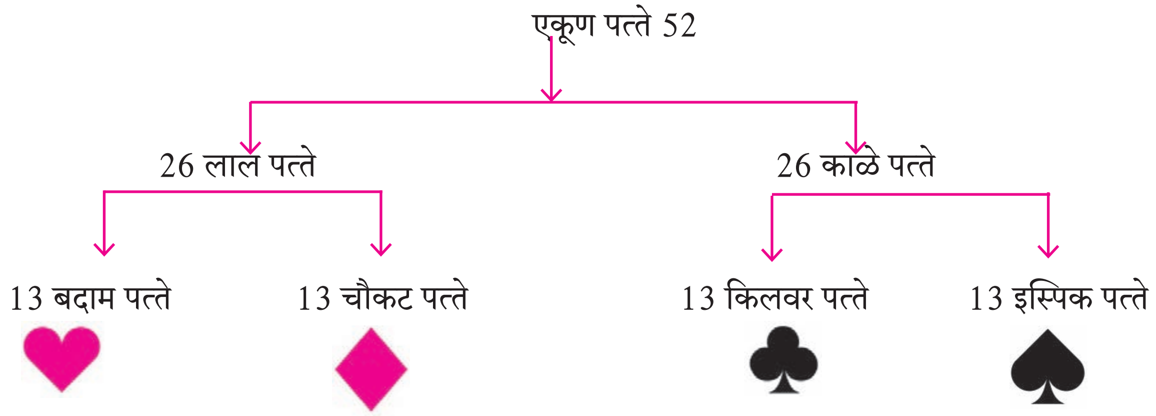
छाप (H) किंवा काटा (T)

(2) एक फासा फेकणे या यादृच्छिक प्रयोगात त्याच्या 6 पृष्ठभागांवर असणाऱ्या टिंबांच्या संख्येवरून 6 निष्पत्ती शक्य आहेत.

1 किंवा 2 किंवा 3 किंवा 4 किंवा 5 किंवा 6

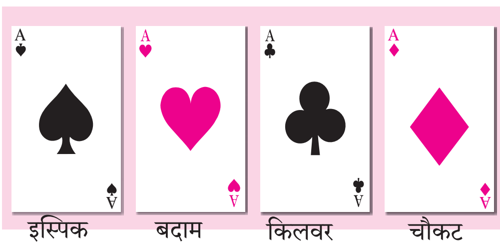
(3) 1 ते 50 संख्या लिहिलेल्या कार्डांच्या संचातून एक कार्ड काढणे, या प्रयोगात 50 निष्पत्ती शक्य आहेत.

(4) योग्य रीतीने पिसलेल्या खेळातील पत्त्यांमधून एक पत्ता काढणे या यादृच्छिक प्रयोगात 52 पत्ते असतात, ते खालीलप्रमाणे दाखवले आहेत.



पत्त्यांच्या कॅटमध्ये चौकट, बदाम, किलवर आणि इस्पिक असे चार संच असतात. प्रत्येक संचात राजा, राणी, गुलाम, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 आणि एक्का असे 13 पत्ते असतात.

राजा, राणी, गुलाम यांना चित्रयुक्त पत्ते म्हणतात. प्रत्येक कॅटमध्ये राजाच्या चित्राचे चार, राणीच्या चित्राचे चार आणि गुलामाच्या चित्राचे चार असे 12 चित्रयुक्त पत्ते असतात.



इस्पिक एक्का   बदाम एक्का   किलवर एक्का   चौकट एक्का

समसंभाव्य निष्पत्ती (Equally likely outcomes)

जर आपण एक फासा फेकला, तर फाशाच्या वरच्या पृष्ठभागावर 1, 2, 3, 4, 5, 6 यांपैकी एक संख्या मिळण्याची शक्यता समान असते. म्हणजेच त्या समसंभाव्य निष्पत्ती असतात. तथापि, जर फासा असा असेल की विशिष्ट अंकच वरच्या पृष्ठभागावर वारंवार मिळतो तर तो फासा असमतोल (biased) असतो. अशा बाबतीत निष्पत्ती समसंभाव्य नसतात.

यापुढे आपण यादृच्छिक प्रयोगांत वापरलेल्या बाबी या समतोल (fair किंवा unbiased) आहेत, असे गृहीत धरणार आहोत.

दिलेल्या निष्पत्तींपैकी कोणतीही निष्पत्ती प्राधान्य क्रमाने मिळत नसेल किंवा सर्व निष्पत्तींची समान शक्यता असेल, तर त्या समसंभाव्य निष्पत्ती आहेत असे म्हणतात. उदा. जर आपण एक नाणे फेकले तर छाप किंवा काटा मिळण्याची निष्पत्ती समसंभाव्य असते. तसेच 1 ते 6 संख्या विविध पृष्ठांवर असणारा फासा फेकला तर त्यांतील कोणताही एक अंक वरच्या पृष्ठावर येण्याची शक्यता तपासा. येथे सगळ्या निष्पत्ती समसंभाव्य आहेत.

सरावसंच 5.1

1. खालील प्रत्येक बाबतीत, किती शक्यता आहेत?

(1) वनिताला महाराष्ट्रातील खालील प्रेक्षणीय ठिकाणांची माहिती आहे. त्यांतील एका ठिकाणी मे महिन्याच्या सुट्‌टीत ती जाणार आहे.

अजिंठा, महाबळेश्वर, लोणार सरोवर, ताडोबा अभयारण्य, आंबोली, रायगड, माथेरान, आनंदवन.

(2) एका आठवड्यातील वार यादृच्छिक पद्धतीने निवडायचा आहे.

(3) पत्त्यांच्या कॅटमधून एक पत्ता यादृच्छिक पद्धतीने निवडायचा आहे.

(4) प्रत्येक कार्डावर एक संख्या याप्रमाणे 10 पासून 20 पर्यंतच्या संख्या लिहिल्या आहेत. त्यांतून एक कार्ड यादृच्छिक पद्धतीने निवडायचे आहे.

विचार करूया.

खालील प्रयोगांपैकी कोणत्या प्रयोगात अपेक्षित निष्पत्ती मिळण्याची शक्यता जास्त आहे?

(1) एक फासा टाकून 1 मिळणे.

(2) एक नाणे फेकून छाप मिळणे.

जाणून घेऊया.

नमुना अवकाश (Sample Space)

यादृच्छिक प्रयोगात, शक्य असणाऱ्या सर्व निष्पत्तींच्या संचाला नमुना अवकाश म्हणतात. नमुना अवकाश 'S' किंवा 'Ω' (हे ग्रीक अक्षर असून उच्चार ओमेगा आहे.) या चिन्हाने संचाच्या स्वरूपात दर्शवतात. नमुना अवकाशातील प्रत्येक घटकाला 'नमुना घटक' म्हणतात. नमुना अवकाश 'S' मधील एकूण घटकांची संख्या n(S) ने दर्शवतात. जर n(S) सांत असेल तर त्याला सांत नमुना अवकाश म्हणतात. सांत नमुना अवकाशाची काही उदाहरणे पुढील सारणीत दिलेली आहेत.

अ. क्र.	यादृच्छिक प्रयोग	नमुना अवकाश	नमुना घटकांची संख्या
1	एक नाणे फेकणे	S = {H, T}	n(S) = 2
2	दोन नाणी फेकणे	S = { HH, HT, TH, TT}	n(S) =
3	तीन नाणी फेकणे	S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}	n(S) = 8
4	एक फासा टाकणे	S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}	n(S) =
5	दोन फासे टाकणे	S = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}	n(S) = 36
6	1 ते 25 संख्या लिहिलेल्या कार्डांच्या संचातून एक कार्ड काढणे.	S = {1, 2, 3, 4, ..., 25}	n(S) =
7	योग्य रीतीने पिसलेल्या बावन्न पत्त्यांच्या कॅट मधून एक पत्ता काढणे.	चौकट : एक्का, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, गुलाम, राणी, राजा इस्पिक : एक्का, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, गुलाम, राणी, राजा बदाम : एक्का, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, गुलाम, राणी, राजा किलवर : एक्का, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, गुलाम, राणी, राजा	n(S) = 52

हे लक्षात ठेवूया.

(i) एक नाणे दोनदा फेकणे किंवा दोन नाणी एकाच वेळी फेकणे या दोन्ही यादृच्छिक प्रयोगात नमुना अवकाश सारखाच असतो. हेच तीन नाण्यांच्या बाबतींतही सत्य असते.

(ii) एक फासा दोनदा फेकणे किंवा दोन फासे एकाच वेळी फेकणे या दोन्हींसाठी नमुना अवकाश सारखाच असतो.

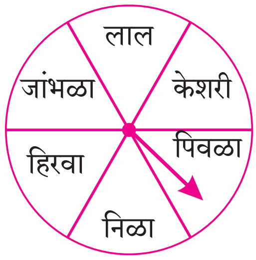
सरावसंच 5.2

1. खालील प्रत्येक प्रयोगासाठी नमुना अवकाश 'S' व त्यातील नमुना घटकांची संख्या n(S) लिहा.

(1) एक फासा व एक नाणे एकाच वेळी फेकणे

(2) 2, 3, 5 या अंकांपासून, अंकांची पुनरावृत्ती न करता, दोन अंकी संख्या तयार करणे.

2. सहा रंगांच्या तबकडीवरील बाण फिरवल्यावर तो कोणत्या रंगावर स्थिर होतो हे पाहणे.



MARCH - 2019

M	T	W	T	F	S	S
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

3. वर्ष 2019 च्या मार्च महिन्यातील 5 च्या पटीत येणाऱ्या तारखेचा वार मिळवणे. (सोबतचे कॅलेंडरचे पान पाहा.)

4. दोन मुलगे (B_1, B_2) व दोन मुली (G_1, G_2) यांच्यातून दोघांची एक रस्ता सुरक्षा समिती बनवायची आहे. तर यासाठी नमुना अवकाश लिहिण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

(1) दोन मुलांची समिती = [ ] (2) दोन मुलींची समिती = [ ]

(3) एक मुलगा व एक मुलगी यांनी मिळून तयार होणारी समिती = [$B_1 G_1$] [ ] [ ] [ ]

(4) $\therefore$ नमुना अवकाश = {..., ..., ..., ..., ..., ...}

जाणून घेऊया.

घटना (Event)

विशिष्ट अट पूर्ण करणाऱ्या निष्पत्तीला अपेक्षित निष्पत्ती (favourable outcome) म्हणतात.

नमुना अवकाश दिला असेल तर अपेक्षित निष्पत्तींच्या संचाला '**घटना**' म्हणतात. घटना हा नमुना अवकाशाचा उपसंच असतो.

या घटना इंग्रजीतील पहिल्या लिपितील A, B, C, D यांसारख्या अक्षरांनी दर्शवतात.

उदा. दोन नाणी फेकली असता समजा A ही घटना, कमीत कमी एक काटा मिळण्याची आहे.

येथे अपेक्षित निष्पत्ती खालीलप्रमाणे,

$$A = \{TT, TH, HT\}$$

घटना A मधील घटकांची संख्या n(A) ने दर्शवतात. येथे n(A) = 3

अधिक माहितीसाठी घटनेचे प्रकार

(i) निश्चित घटना (Certain event)	(iv) पूरक घटना (Complement of an event)
(ii) अशक्य घटना (Impossible event)	(v) परस्पर अपवर्जी घटना (Mutually exclusive event)
(iii) एकघटकी घटना (Simple event)	(vi) सर्वसमावेशी घटना (Exhaustive event)

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) दोन नाणी एकाच वेळी फेकणे या प्रयोगासाठी नमुना अवकाश 'S' लिहा. त्यातील नमुना घटकांची संख्या n(S) लिहा. या प्रयोगासंबंधी खालील घटना संच स्वरूपात लिहा आणि त्यातील नमुना घटकांची संख्या लिहा.

(i) घटना A साठी अट, कमीत कमी एक छाप मिळण्याची आहे.

(ii) घटना B साठी अट, एकच छाप मिळण्याची आहे.

(iii) घटना C साठी अट, जास्तीत जास्त एक काटा मिळण्याची आहे.

(iv) घटना D साठी अट, एकही छाप न मिळण्याची आहे.

उकल : दोन नाणी एकाच वेळी फेकली असता,

S = {HH, HT, TH, TT}   n(S) = 4

(i) घटना A साठी अट, कमीत कमी एक छाप मिळण्याची आहे.

A = {HH, HT, TH}   n(A) = 3

(ii) घटना B साठी अट, एकच छाप मिळण्याची आहे.

B = { HT, TH}   n(B) = 2

(iii) घटना C साठी अट, जास्तीत जास्त एक काटा मिळण्याची आहे.

C = {HH, HT, TH}   n(C) = 3

(iv) घटना D साठी अट, एकही छाप न मिळण्याची आहे.

D = {TT}   n(D) = 1

उदा. (2) एका पिशवीत 50 कार्डे आहेत. प्रत्येक कार्डावर 1 ते 50 यांपैकी एक संख्या लिहिली आहे. त्यांतून कोणतेही एक कार्ड यादृच्छिक पद्धतीने काढले तर नमुना अवकाश 'S' लिहा.

घटना A, B व त्यांतील नमुना घटकांची संख्या लिहा.

(i) घटना A साठी अट, कार्डावरील संख्येला 6 ने भाग जाणे, ही आहे.

(ii) घटना B साठी अट, कार्डावरची संख्या पूर्ण वर्ग असणे, ही आहे.

उकल : नमुना अवकाश, S = {1, 2, 3, . . ., 49, 50}   n(S) = 50

(i) घटना A साठी अट, कार्डावरील संख्येला 6 ने भाग जाणे ही आहे.

A = {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48},   n(A) = 8

(ii) घटना B साठी अट, कार्डावरची संख्या पूर्ण वर्ग असणे ही आहे.

B = {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49},   n(B) = 7

उदा. (3) 3 मुले व 2 मुली यांतून दोन विद्यार्थ्यांची स्वच्छता समिती खालील अटींप्रमाणे बनवायची आहे. नमुना अवकाश 'S' व नमुना घटकांची संख्या लिहा. तसेच खालील घटना संच स्वरूपात लिहा आणि नमुना घटकांची संख्या लिहा.

(i) घटना A साठी अट, समितीत कमीत कमी एक मुलगी असणे, ही आहे.

(ii) घटना B साठी अट, समितीत एक मुलगा व एक मुलगी असणे, ही आहे.

(iii) घटना C साठी अट, समितीत फक्त मुलगे असणे, ही आहे.

(iv) घटना D साठी अट, समितीत जास्तीत जास्त एक मुलगी असणे, ही आहे.

उकल : समजा, B_1, B_2, B_3 हे तीन मुलगे व G_1, G_2 या दोन मुली आहेत.

या मुला-मुलींतून दोन सभासदांची स्वच्छता समिती बनवायची आहे.

$S = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2, G_1G_2\}$ $\quad n(S) = 10$

(i) घटना A साठी अट समितीत कमीत कमी एक मुलगी असणे ही आहे.

$A = \{B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2, G_1G_2\}$ $\quad n(A) = 7$

(ii) घटना B साठी अट समितीत एक मुलगा व एक मुलगी असणे ही आहे.

$B = \{B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2\}$ $\quad n(B) = 6$

(iii) घटना C साठी अट समितीत फक्त मुलगे असणे ही आहे.

$C = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3\}$ $\quad n(C) = 3$

(iv) घटना D साठी अट समितीत जास्तीत जास्त एक मुलगी असणे ही आहे.

$D = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2\}$ $\quad n(D) = 9$

उदा. (4) दोन फासे फेकले असता नमुना अवकाश 'S' व नमुना अवकाशातील घटकांची संख्या n(S) लिहा.

खालील अटी पूर्ण करणारी घटना संच स्वरूपात लिहा आणि त्यातील नमुना घटकांची संख्या लिहा.

(i) वरच्या पृष्ठभागावर येणाऱ्या अंकांची बेरीज मूळ संख्या असेल.

(ii) वरच्या पृष्ठभागावर येणाऱ्या अंकांची बेरीज 5 च्या पटीत आहे.

(iii) वरच्या पृष्ठभागावर येणाऱ्या अंकांची बेरीज 25 आहे.

(iv) पहिल्या फाशावर मिळालेला अंक दुसऱ्या फाशावरील अंकापेक्षा लहान आहे.

उकल : नमुना अवकाश,

$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$
$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$
$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),$
$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$
$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),$
$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$ $n(S) = 36$

(i) समजा, वरच्या पृष्ठभागावर येणाऱ्या अंकांची बेरीज मूळ संख्या असणे, ही घटना E ची अट आहे.

$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4),$
$(4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 6), (6, 1), (6, 5)\}$ $n(E) = 15$

(ii) वरच्या पृष्ठभागावर येणाऱ्या अंकांची बेरीज 5 च्या पटीत असणे, ही घटना F ची अट आहे.

$F = \{ (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 6), (5, 5), (6, 4) \}$ $n(F) = 7$

(iii) घटना G साठी अट वरच्या पृष्ठभागावर येणाऱ्या अंकांची बेरीज 25 असणे, ही आहे.

$G = \{ \; \} = \phi$ $n(G) = 0$

(iv) घटना H साठी अट पहिल्या फाशावर मिळालेला अंक दुसऱ्या फाशावरील अंकापेक्षा लहान असणे ही आहे.

$H = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$
$(3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6) \}$ $n(H) = 15$

सरावसंच 5.3

1. खालील प्रत्येक प्रयोगासाठी नमुना अवकाश ‘S’ त्यातील नमुना घटकांची संख्या n(S) तसेच घटना A, B, C संच स्वरूपात लिहा आणि n(A), n(B) आणि n(C) लिहा.

(1) एक फासा टाकला असता,

घटना A साठी अट, वरच्या पृष्ठभागावर सम संख्या मिळणे अशी आहे.

घटना B साठी अट, वरच्या पृष्ठभागावर विषम संख्या मिळणे अशी आहे.

घटना C साठी अट, वरच्या पृष्ठभागावर मूळ संख्या मिळणे अशी आहे.

(2) दोन फासे एकाच वेळी टाकले असता,

घटना A साठी अट, वरच्या पृष्ठभागावरील अंकांची बेरीज 6 च्या पटीत असणे अशी आहे.

घटना B साठी अट, वरच्या पृष्ठभागावरील अंकांची बेरीज कमीत कमी 10 असणे अशी आहे.

घटना C साठी अट, दोन्ही फाशांवरील अंक समान असणे अशी आहे.

(3) तीन नाणी एकाच वेळी फेकली असता,

घटना A साठी अट, कमीत कमी दोन छाप मिळणे अशी आहे.

घटना B साठी अट, एकही छाप न मिळणे अशी आहे

घटना C साठी अट, दुसऱ्या नाण्यावर छाप मिळणे अशी आहे.

(4) अंकांची पुनरावृत्ती न करता 0, 1, 2, 3, 4, 5 या अंकांपासून दोन अंकी संख्या तयार केल्या आहेत.

घटना A साठी अट, तयार झालेली संख्या सम संख्या मिळणे अशी आहे.

घटना B साठी अट, तयार झालेली संख्या 3 ने भाग जाणारी असणे अशी आहे.

घटना C साठी अट, तयार झालेली संख्या 50 पेक्षा मोठी असणे अशी आहे.

(5) तीन पुरुष व दोन स्त्रिया यांच्यातून दोघांची 'पर्यावरण समिती' बनवायची आहे.

घटना A साठी अट, समितीत कमीत कमी एक स्त्री असावी अशी आहे.

घटना B साठी अट, समितीत एक पुरुष व एक स्त्री असावी अशी आहे.

घटना C साठी अट, समितीत एकही स्त्री नसावी अशी आहे.

(6) एक नाणे व एक फासा एकाच वेळी फेकले.

घटना A साठी अट, छाप आणि विषम संख्या मिळणे अशी आहे .

घटना B साठी अट, H किंवा T आणि समसंख्या मिळणे अशी आहे.

घटना C साठी अट, फाशावरील संख्या 7 पेक्षा मोठी आणि नाण्यावर काटा मिळणे अशी आहे.

जाणून घेऊया.

घटनेची संभाव्यता (Probability of an event)

एक सोपा प्रयोग विचारात घेऊ. एका पिशवीत समान आकाराचे चार चेंडू आहेत. त्यांतील तीन चेंडू पांढरे व चौथा चेंडू काळा आहे. डोळे मिटून त्यांतील एक चेंडू काढायचा आहे.

काढलेला चेंडू पांढरा असण्याची शक्यता जास्त आहे, हे सहज कळते.

गणिती भाषेत एखाद्या अपेक्षित घटनेची शक्यता दर्शवणाऱ्या संख्येला संभाव्यता असे म्हणतात. ती पुढील सूत्र वापरून संख्येने किंवा शतमानात दर्शवतात.

एखाद्या यादृच्छिक प्रयोगासाठी नमुना अवकाश S असेल आणि A ही त्या प्रयोगासंबंधी अपेक्षित घटना असेल, तर त्या घटनेची संभाव्यता 'P(A)' अशी दर्शवतात आणि पुढील सूत्राने ठरवतात.

$$P(A) = \frac{\text{घटना 'A' मधील नमुना घटकांची संख्या}}{\text{नमुना अवकाशातील एकूण घटकांची संख्या}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

वरील प्रयोगात, 'उचललेला चेंडू पांढरा असणे' ही घटना A असेल, तर n(A) = 3, कारण पांढरे चेंडू तीन आहेत आणि एकूण चेंडू चार असल्याने n(S) = 4

$\therefore$ उचललेला चेंडू पांढरा असणे, याची संभाव्यता $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$

तसेच 'उचललेला चेंडू काळा असणे' ही घटना B असेल, तर n(B) = 1 $\therefore$ $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{4}$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एक नाणे फेकले असता, खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

(i) छाप मिळणे. (ii) काटा मिळणे.

उकल : समजा, 'S' नमुना अवकाश आहे.

S = {H, T} n(S) = 2

(i) समजा, घटना A साठी अट छाप मिळण्याची आहे.

A = {H} n(A) = 1

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

(ii) समजा, घटना B साठी अट काटा मिळण्याची आहे.

B = {T} n(B) = 1

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

उदा. (2) एक फासा टाकला असता खालील प्रत्येक अट पूर्ण करणाऱ्या घटनेची संभाव्यता काढा.

(i) वरच्या पृष्ठभागावर मूळ संख्या मिळणे. (ii) वरच्या पृष्ठभागावर मिळालेली संख्या सम असणे.

उकल : समजा, 'S' नमुना अवकाश आहे.

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} n(S) = 6

(i) घटना A : वरच्या पृष्ठभागावर मूळ संख्या मिळणे.

A = {2, 3, 5} n(A) = 3

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(ii) घटना B : वरच्या पृष्ठभागावर सम संख्या मिळणे.

$B = \{2, 4, 6\}$ $n(B) = 3$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

उदा. (3) योग्य रीतीने पिसलेल्या 52 पत्त्यांच्या कॅटमधून एक पत्ता काढला, तर खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

(i) तो पत्ता लाल असणे. (ii) तो पत्ता चित्रयुक्त असणे.

उकल : समजा, 'S' नमुना अवकाश आहे. $\therefore n(S) = 52$

(i) घटना A : काढलेला पत्ता लाल असणे.

एकूण लाल पत्ते = 13 चौकट पत्ते + 13 बदाम पत्ते

$n(A) = 26$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

(ii) घटना B : काढलेला पत्ता चित्रयुक्त असणे.

कॅटमध्ये राजा, राणी आणि गुलाम हे चित्रयुक्त पत्ते असतात. एकूण 12 चित्रयुक्त पत्ते असतात.

$\therefore n(B) = 12$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

उदा. (4) एका खोक्यात 5 स्ट्रॉबेरीची, 6 कॉफीची व 2 पेपरमिंटची चॉकलेट्स आहेत.त्या खोक्यातून एक चॉकलेट काढले, तर – (i) काढलेले चॉकलेट कॉफीचे असणे, आणि

(ii) काढलेले चॉकलेट पेपरमिंटचे असणे यांची संभाव्यता काढा.

उकल : समजा 'S' नमुना अवकाश आहे. $\therefore n(S) = 5 + 6 + 2 = 13$

घटना A : काढलेले चॉकलेट कॉफीचे असणे

$n(A) = 6$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{6}{13}$$

घटना B : काढलेले चॉकलेट पेपरमिंटचे असणे

$n(B) = 2$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{2}{13}$$

हे लक्षात ठेवूया.

- संभाव्यता सांगताना किंवा लिहिताना अपूर्णांकाचा किंवा शतमानाचा वापर केला जातो.
- कोणत्याही घटनेची संभाव्यता ही 0 ते 1 किंवा 0% ते 100% असते.

  समजा, घटना E असेल, तर $0 \le P(E) \le 1$ किंवा $0\ \% \le P(E) \le 100\ \%$

  उदा. $\frac{1}{4}$ ही संभाव्यता 25% अशी लिहिता येते.
- पाठाच्या सुरुवातीला वर्गातील मुलांना वनस्पतींच्या नावांच्या चिठ्ठ्या उचलायला सांगितले, त्या वेळी तुळस हे नाव असलेली चिठ्ठी विद्यार्थ्याला मिळण्याच्या संभाव्यतेचा विचार केला. एकाच चिठ्ठीवर तुळस हे नाव आहे. जर 40 विद्यार्थी प्रत्येकी एक चिठ्ठी उचलणार असतील तर प्रत्येकाला तुळस हे नाव लिहिलेली चिठ्ठी येण्याची संभाव्यता $\frac{1}{40}$ आहे. पहिल्याने, तसेच मध्ये कोणीही किंवा शेवटी चिठ्ठी उचलणाऱ्याला ती चिठ्ठी मिळण्याची संभाव्यता तेवढीच आहे.

सरावसंच 5.4

1. दोन नाणी फेकली असता खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

(1) कमीत कमी एक छाप मिळणे. (2) एकही छाप न मिळणे.

2. दोन फासे एकाच वेळी टाकले असता खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

(1) पृष्ठभागावरील अंकांची बेरीज कमीत कमी 10 असणे.

(2) पृष्ठभागावरील अंकांची बेरीज 33 असणे.

(3) पहिल्या फाशावरील अंक दुसऱ्या फाशावरील अंकापेक्षा मोठा असणे.

3. एका पेटीत 15 तिकिटे आहेत. प्रत्येक तिकीटावर 1 ते 15 पैकी एक संख्या लिहिलेली आहे. त्या पेटीतून एक तिकीट यादृच्छिक पद्धतीने काढले तर तिकिटावरची संख्या ही

(1) सम संख्या असणे. (2) संख्या 5 च्या पटीत असणे, या घटनेची संभाव्यता काढा.

4. अंकांची पुनरावृत्ती न करता 2, 3, 5, 7, 9 या अंकांपासून दोन अंकी संख्या तयार केली, तर खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

(1) ती संख्या विषम असेल. (2) ती संख्या 5 च्या पटीत असेल.

5. योग्य रीतीने पिसलेल्या 52 पत्त्यांच्या कॅटमधून एक पत्ता काढला तर खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

(1) एक्का मिळणे. (2) इस्पिक पत्ता मिळणे.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह – 5

1. खालील प्रत्येक प्रश्नासाठी अचूक पर्याय निवडा.

(1) खालील पर्यायांपैकी कोणती संभाव्यता असू शकणार नाही ?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) 1.5 (C) 15 % D) 0.7

(2) एक फासा फेकला तर वरच्या पृष्ठभागावर 3 पेक्षा कमी संख्या येण्याची संभाव्यता ..... असते.

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ D) 0

(3) 1 ते 100 यांमधून निवडलेली संख्या मूळ संख्या असण्याची संभाव्यता . . . . . असेल.

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{6}{25}$ (C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{13}{50}$

(4) प्रत्येक कार्डावर एक संख्या, याप्रमाणे 1 ते 40 या संख्या लिहिलेली 40 कार्डे एका पिशवीत आहेत. त्यांपैकी एक कार्ड उचलले असता त्या कार्डावरची संख्या 5 च्या पटीत असण्याची संभाव्यता ..... असेल.

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{1}{3}$

(5) जर n(A) = 2, P(A) = $\frac{1}{5}$, तर n(S) = ?

(A) 10 (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{3}$

2. बास्केटबॉल खेळाडू जॉन, वसीम व आकाश एका ठरावीक जागेवरून बास्केटमध्ये बॉल टाकण्याचा सराव करत होते. बास्केटमध्ये बॉल पडण्याची जॉनची संभाव्यता $\frac{4}{5}$, वसीमची 0.83 व आकाशची 58% आहे, तर कोणाची संभाव्यता सर्वांत जास्त आहे ?

3. एका हॉकी संघात 6 बचाव करणारे, 4 आक्रमक व एक गोलरक्षक असे खेळाडू आहेत. यादृच्छिक पद्धतीने त्यांतील एक खेळाडू संघनायक म्हणून निवडायचा आहे. तर खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

(1) गोलरक्षक हा संघनायक असणे.

(2) बचाव करणारा खेळाडू संघनायक असणे.

4. जोसेफने एका टोपीत प्रत्येक कार्डावर इंग्रजी वर्णमालेतील एक अक्षर याप्रमाणे सर्व अक्षरांची 26 कार्डे ठेवली आहेत. त्यांतून अक्षराचे एक कार्ड यादृच्छिक पद्धतीने काढायचे आहे, तर काढलेले अक्षर स्वर असण्याची संभाव्यता काढा.

5. फुगेवाला 2 लाल, 3 निळे आणि 4 हिरवे अशा रंगीत फुग्यांतील एक फुगा प्रणालीला यादृच्छिक पद्धतीने देणार आहे. तर खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

(1) मिळालेला फुगा लाल असणे.

(2) मिळालेला फुगा निळा असणे.

(3) मिळालेला फुगा हिरवा असणे.

6. एका खोक्यात 5 लाल पेनं, 8 निळी पेनं आणि 3 हिरवी पेनं आहेत. यादृच्छिक पद्धतीने ऋतुजाला एक पेन काढायचे आहे. तर काढलेले पेन निळे असण्याची संभाव्यता काढा.

7. एका फाशाची सहा पृष्ठे खालीलप्रमाणे आहेत.

A B C D E A

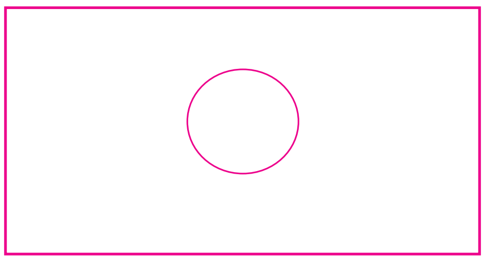
हा फासा एकदाच टाकला तर पुढील घटनांची संभाव्यता काढा.

(1) वरच्या पृष्ठभागावर 'A' मिळणे. (2) वरच्या पृष्ठभागावर 'D' मिळणे.

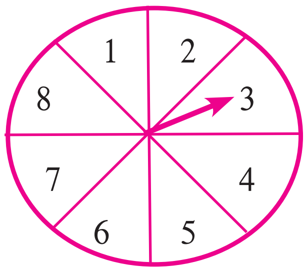
8. एका खोक्यात 30 तिकिटे आहेत. प्रत्येक तिकिटावर 1 ते 30 पैकी एकच संख्या लिहिली आहे. त्यांतून कोणतेही एक तिकीट यादृच्छिक पद्धतीने काढले तर खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

(1) तिकिटावरील संख्या विषम असणे. (2) तिकिटावरील संख्या पूर्ण वर्ग असणे.

9. एका बागेची लांबी व रुंदी अनुक्रमे 77 मी व 50 मी आहे. बागेत 14 मीटर व्यासाचे तळे आहे. बागेजवळील इमारतीच्या गच्चीवर वाळत घातलेला टॉवेल वाऱ्यामुळे उडून बागेत पडला. तर तो बागेतील तळ्यात पडला असण्याची संभाव्यता काढा.



10. संधीच्या एका खेळामध्ये 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 यांपैकी एका अंकावर बाण स्थिरावतो आणि त्या समसंभाव्य निष्पत्ती आहेत. खालील घटनांची संभाव्यता काढा.



(1) तो बाण 8 या अंकावर स्थिरावणे.

(2) तो बाण विषम अंकावर स्थिरावणे.

(3) बाणाने दर्शवलेली संख्या 2 पेक्षा मोठी असणे.

(4) बाणाने दर्शवलेली संख्या 9 पेक्षा लहान असणे.

11. प्रत्येक कार्डावर एक याप्रमाणे 0 ते 5 या पूर्णांक संख्या लिहून तयार केलेली सहा कार्डे खोक्यात ठेवली आहेत. तर खालील प्रत्येक घटनेची संभाव्यता काढा.

(1) काढलेल्या कार्डावरील संख्या ही नैसर्गिक संख्या असणे.

(2) काढलेल्या कार्डावरील संख्या 1 पेक्षा लहान असणे.

(3) काढलेल्या कार्डावरील संख्या ही पूर्ण संख्या असणे.

(4) काढलेल्या कार्डावरील संख्या 5 पेक्षा मोठी असणे.

12. एका बॅगेत 3 लाल, 3 पांढरे व 3 हिरवे चेंडू आहेत. बॅगेतून 1 चेंडू यादृच्छिक पद्धतीने काढला असता खालील प्रत्येक घटनेची संभाव्यता काढा.

(1) काढलेला चेंडू लाल असणे. (2) काढलेला चेंडू लाल नसणे.

(3) काढलेला चेंडू लाल किंवा पांढरा असणे.

13. प्रत्येक कार्डावर एक याप्रमाणे mathematics या शब्दातील सर्व अक्षरे लिहिली आणि ती कार्डे पालथी ठेवली. त्यांतून एक कार्ड उचलल्यास ते अक्षर 'm' असण्याची संभाव्यता काढा.

14. एका शाळेतील 200 विद्यार्थ्यांपैकी 135 विद्यार्थ्यांना कबड्डी हा खेळ आवडतो व इतरांना हा खेळ आवडत नाही. सर्व विद्यार्थ्यांतून 1 विद्यार्थी निवडला तर त्याला कबड्डी हा खेळ आवडत नसण्याची संभाव्यता काढा.

15.★ 0, 1, 2, 3, 4 यांपैकी अंक घेऊन दोन अंकी संख्या तयार करायची आहे. अंकांची पुनरावृत्ती केलेली चालेल तर खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

(1) ती संख्या मूळ असणे. (2) ती संख्या 4 च्या पटीत असणे.

(3) ती संख्या 11 च्या पटीत असणे.

16.★ एका फाशाच्या पृष्ठभागावर 0, 1, 2, 3, 4, 5, या संख्या आहेत. हा फासा दोनदा फेकला, तर वरच्या पृष्ठांवर मिळालेल्या संख्यांचा गुणाकार शून्य असण्याची संभाव्यता काढा.

17. खालील कृती करा –

कृती I : तुमच्या वर्गाचा एकूण पट n(S) = $\square$

वर्गातील चश्मा वापरणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या n(A) = $\square$

सर्व विद्यार्थ्यांमधून चश्मा घालणारा एक विद्यार्थी यादृच्छिक पद्धतीने निवडण्याची संभाव्यता P(A) = $\square$

सर्व विद्यार्थ्यांमधून चश्मा न घालणारा एक विद्यार्थी यादृच्छिक पद्धतीने निवडण्याची संभाव्यता P(B) = $\square$

कृती II : नमुना अवकाश स्वत: ठरवून खालील चौकटी भरा.

नमुना अवकाश → S = { } → n(S) = $\square$

घटना A साठी अट 'सम संख्या मिळणे' ही आहे. → A = { } → n(A) = $\square$

$$P(A) = \frac{\square}{\square} = \square$$

❑❑❑