21. ઘન પદાર્થોની સપાટીના ક્ષેત્રફળ અને ઘનફળ (કદ)

સમજ : પદાર્થ દ્વારા રોકેલી જગ્યાને ઘન કહેવાય છે.

આકૃતિઓ :

પદાર્થ અને તેની ઘન આકૃતિના આકાર વિષે :

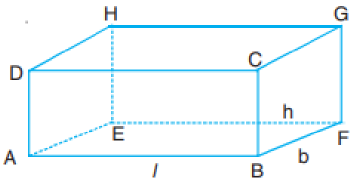
પદાર્થ	ઘનાકૃતિ
ઈંટ, કબાટ	લંબઘન
ચાનું પેકેટ	સમઘન
ઢોલ, પાઉડરનો ડબ્બો	નળાકાર
જોકરની ટોપી, આઇસ્ક્રીમ કોન	શંકુ
ફૂટબોલનો દડો	ગોળો
કટોરો	અર્ધગોળો

લંબઘન અને સમઘન :

- છ બાજુઓ હોય છે.
- લંબાઇ, પહોળાઈ અને ઊંચાઇ જેને l, b , h વડે દર્શાવવામાં આવે છે.
- છ લંબચોરસના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો લંબઘનની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ (પૃષ્ઠફળ) બને છે.
- એકજ પદાર્થના એક થી વધુ સપાટીના ક્ષેત્રફળના સરવાળાને કુલ ક્ષેત્રફળના બદલે પૃષ્ઠફળ કહીશું.
- કુલ ક્ષેત્રફળ એટલે પૃષ્ઠફળ)

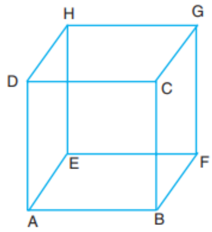
લંબઘનના અગત્યના સૂત્ર :

લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ = 2(lb + bh + hl)
લંબઘનનું ઘનફળ = lbh
લંબઘનનો વિકર્ણ = $\sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$



સમઘનના અગત્યના સૂત્ર :

બંધ સમઘનનું પૃષ્ઠફળ = $6a^2$
ખુલ્લા સમઘનનું પૃષ્ઠફળ = $5a^2$
સમઘનનું ઘનફળ = a^3
સમઘનનો વિકર્ણ = $\sqrt{a^2 + a^2 + a^2}$ = $a\sqrt{3}$



સવાલ 1) 6 મીટર લંબાઈ, 3 મીટર પહોળાઈ અને 2.5 મીટર ઊંચાઈ ધરાવતાં લંબઘનની સપાટીનું પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ અને વિકર્ણ શોધો ?

જવાબ : અહી, લંબાઈ (l) = 6 મી., પહોળાઈ (b) = 3 મી. અને ઊંચાઈ (h) = 2.5 મી. આપેલ છે.

તે પરથી,

લંબઘનની સપાટીનું પૃષ્ઠફળ = 2(lb + bh + hl)

= 2(6×3+3×2.5+2.5×6)

= 2(18 + 7.5 + 15)

= 2(40.5)

= 81મી.^{3}

લંબઘન ઘનફળ = lbh

= 6×3×2.5

= 45મી.^{3}

લંબઘનનો વિકર્ણ = $\sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$

= $\sqrt{6^2 + 3^2 + 2.5^2}$

= $\sqrt{36 + 9 + 62.5}$

= $\sqrt{107.5}$

= $\sqrt{5 \times 5 \times 4.3}$

= $5\sqrt{4.3}$ મીટર

સવાલ 2) એક સમઘનનું ઘનફળ 3375 સેમી.^{3} છે, તો સમઘનની બાજુનું માપ અને સપાટીનું પૃષ્ઠફળ શોધો?

જવાબ : અહી, સમઘનનું ઘનફળ 3375 સેમી.^{3} આપેલ છે.

તે પરથી,

સમઘનનું ઘનફળ $= a^3$

$\therefore \quad 3375 = a^3$

$\therefore \quad \sqrt[3]{3375} = \sqrt[3]{a^3}$ (બંને બાજુ ઘનમૂળ લેતાં)

$\therefore \quad \sqrt[3]{15 \times 15 \times 15} = \sqrt[3]{a^3}$

$\therefore \quad 15 = a$

બાજુ, $a = 15$ સેમી.

બંધ સમઘનનું પૃષ્ઠફળ $= 6a^2$

$= 6(15)^2$

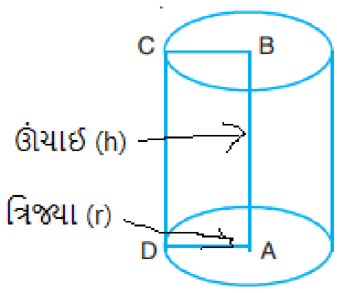
$= 6 \times 15 \times 15$

$= 6 \times 225$

$= 1350$ સેમી.^{2}

લંબવૃતીય નળાકાર :

નળાકારના અગત્યના સૂત્ર :



બંધ નળાકારનું પૃષ્ઠફળ / વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi rh$

ખુલ્લા નળાકારનું પૃષ્ઠફળ / કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi r(r+h)$

નળાકારનું ઘનફળ $= \pi r^2 h$

સવાલ 3) એક નળાકારના પાયાની ત્રિજ્યા અને તેની ઊંચાઇ અનુક્રમે 7 સેમી. અને 10 સેમી. છે. તો (1) નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ (2) કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને (3) નળાકારનું ઘનફળ શોધો?

જવાબ : અહીં, નળાકારની ત્રિજ્યા (r) = 7 સેમી., ઊંચાઇ (h) = 10 સેમી. આપેલી છે.

તે પરથી,

નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi rh$

$= 2\times\frac{22}{7}\times 7\times 10$

$= 2\times 22\times 10$

$= 440$ સેમી.^{2}

કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi r(r+h)$

$= 2\times\frac{22}{7}\times 7(7+10)$

$= 2\times\frac{22}{7}\times 7(17)$

$= 2\times 22\times 17$

$= 748$ સેમી.^{2}

નળાકારનું ઘનફળ $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7}\times 7^2\times 10$

$= \frac{22}{7}\times 7\times 7\times 10$

$= 22\times 7\times 10$

$= 1540$ સેમી.^{3}

સવાલ 4) ધાતુની એક નળાકાર પાઇપ બંન્ને છેડેથી ખુલ્લી છે. પાઇપનો બહારનો વ્યાસ 12 સેમી. છે. ધાતુની જાડાઇ 1 સેમી. અને પાઇપની લંબાઇ 70 સેમી. હોય, તો પાઇપમાં વપરાયેલ ધાતુનું ઘનફળ શોધો ?

જવાબ : અહીં, વ્યાસ (d) =12 સેમી., ધાતુની જાડાઈ = 1 સેમી. લંબાઈ(h) = 70 સેમી. આપેલી છે.

તે પરથી,

પાઈપની બાહ્ય ત્રિજ્યા (r_1) $= \frac{\text{વ્યાસ}}{2} = \frac{12}{2}$ = 6 સેમી.

પાઈપની અંદરની બાહ્ય ત્રિજ્યા (r_2) = બાહ્ય ત્રિજ્યા – ધાતુની ત્રિજ્યા

= 6 – 1

= 5 સેમી.

પાઈપની બનાવટમાં વપરાયેલ ધાતુનું ઘનફળ = બાહ્ય નળાકાર નું ઘનફળ – પોલા નળાકારનું ઘનફળ

$= \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 6^2 \times 70 - \frac{22}{7} \times 5^2 \times 70$

$= \frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times 70 - \frac{22}{7} \times 5 \times 5 \times 70$

$= \frac{22}{7} \times 36 \times 70 - \frac{22}{7} \times 25 \times 70$

$= 22 \times 36 \times 10 - 22 \times 25 \times 10$

$= 22 \times 10(36 - 25)$

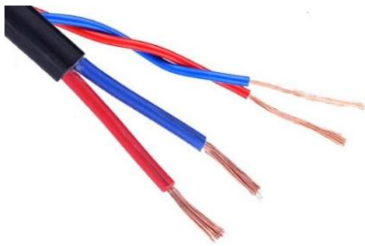
= 220 (11)

= 2420 સેમી.^{3}

સવાલ 5) ધાતુના એક ટુકડાનું ઘનફળ 1.54 ઘનમીટર છે. આ ધાતુને પીગાળીને તેમાંથી 3.5 મિમી. વ્યાસનો તાર ખેંચવામાં આવે છે, તો આ તારની લંબાઈ શોધો?

જવાબ : અહી, ટુકડાનું ઘનફળ 1.54 ઘનમીટર, તારનો વ્યાસ (d) = 3.5 મિમિ. આપેલ છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે તાર એ નળાકારના સ્વરૂપમાં હોય છે.



ધાતુનું ઘનફળ ઘનમીટરમાં આપ્યું છે તેથી ત્રિજ્યાનું માપ મીટરમાં ફેરવીએ.

1 મીટર = 100 સેમી.

100 સેમી. = 1000 મિમી.

વ્યાસ 3.5 મિમી. છે તેથી ત્રિજ્યા (r) = $\frac{3.5}{2} = \frac{7}{4}$ મિમી.

$r = \frac{7}{4 \times 1000}$ મીટર

$r = \frac{7}{4000}$ મીટર

તારનું ઘનફળ = તારના ટુકડાનું ઘનફળ

$\pi r^2 h = 1.54$

$\frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{4000}\right)^2 \times h = \frac{154}{100}$

$\frac{22}{7} \times \frac{7}{4000} \times \frac{7}{4000} \times h$ મિમી.^{3} $= \frac{154}{100}$

$h = \frac{154}{100} \times \frac{7}{22} \times \frac{4000}{7} \times \frac{4000}{7}$

$h = \frac{154 \times 7 \times 4000 \times 4000}{100 \times 22 \times 7 \times 7}$

$h = \frac{154 \times 4000 \times 40}{22 \times 7}$

$h = \frac{24640000}{154}$

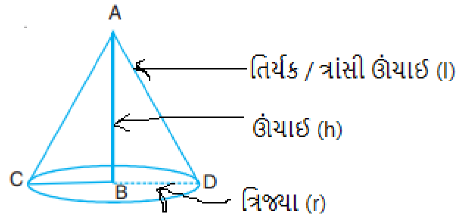
h = 160000 મીટર

h = 160 કિલોમીટર (1000 મીટર =1 કિલોમીટર)

આમ, તારની લંબાઈ 160 કિલોમીટર થાય.

લંબવૃતીય શંકુ :

શંકુના અગત્યના સૂત્ર :



બંધ શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi rl$

ખુલ્લા શંકુનું પૃષ્ઠફળ / કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r(r+l)$

શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

ત્રાંસી / તિર્યક ઊંચાઇ (l) $= \sqrt{h^2 + r^2}$

સવાલ 6) એક શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા 7 સેમી. અને તેની ઊંચાઇ 24 સેમી. છે, તો શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ, શંકુનું પૃષ્ઠફળ અને શંકુનું ઘનફળ શોધો?

જવાબ : અહીં, ત્રિજ્યા (r) =7 સેમી., ઊંચાઇ (h) = 24 સેમી. આપેલી છે.

સૌ પ્રથમ આપણે શંકુની ત્રાંસી / તિર્યક ઊંચાઇ શોધીએ.

ત્રાંસી / તિર્યક ઊંચાઇ (l) $= \sqrt{h^2 + r^2}$

$= \sqrt{24^2 + 7^2}$

$= \sqrt{24 \times 24 + 7 \times 7}$

$= \sqrt{576 + 49}$

$= \sqrt{625}$ (વર્ગમૂળ લેતાં)

= 25 સેમી

શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25$

$= 22 \times 25$

= 550 સેમી.^{2}

ખુલ્લા શંકુનું પૃષ્ઠફળ / કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r(r+l)$

$= \frac{22}{7} \times 7(7 + 25)$

$= 22 (7 + 25)$

$= 22 \times 32$

= 704 સેમી.^{2}

શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7^2 \times 24$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 3 \times 8$

$= 1 \times 22 \times 7 \times 8$

= 1232સેમી.^{3}

સવાલ 7) શંકુ આકારના એક તંબુની ઊંચાઇ 6 મી. અને તેના પાયાની ત્રિજ્યા 8 મી. છે. એક ચો.મી. કપડાનો ભાવ રૂ.120 હોય, તો તંબુમાં વપરાયેલા કપડાની કિંમત શોધો? (π = 3.14)

જવાબ : અહીં, ત્રિજ્યા (r) =8 મી., ઊંચાઇ (h) = 6 મી. તથા એક ચો.મી. કપડાનો ભાવ રૂ.120 આપેલ છે.

સૌ પ્રથમ આપણે શંકુની ત્રાંસી / તિર્યક ઊંચાઇ શોધીએ.

ત્રાંસી / તિર્યક ઊંચાઇ (l) $= \sqrt{h^2 + r^2}$

$= \sqrt{6^2 + 8^2}$

$= \sqrt{6 \times 6 + 8 \times 8}$

$= \sqrt{36 + 64}$

$= \sqrt{100}$ (વર્ગમૂળ લેતાં)

= 10 મીટર

શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r l$

$= 3.14 \times 8 \times 10$

= 251.2સેમી.^{2}

1 ચો.મી. કાપડાની કિંમત રૂ. 120 છે.

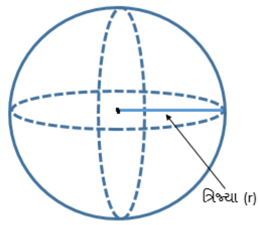
$\therefore$ 251.2 ચો.મી. કાપડાની કિંમત $= 120 \times 251.2$

= 30144 રૂપિયા

આમ, તંબુમાં વપરાયેલ કાપડની કુલ કિંમત 30144 રૂપિયા થાય.

ગોળો / ગોલક :

ગોળાના અગત્યના સૂત્ર :



ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $4\pi r^2$

ગોળાનું ઘનફળ = $\frac{4}{3}\pi r^3$

સવાલ 8) 14 સેમી. ત્રિજ્યાવાળા ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને ઘનફળ શોધો ?

જવાબ : અહીં, ગોળાની ત્રિજ્યા (r) = 14 સેમી. આપેલી છે.

ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 14^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

$= 4 \times 22 \times 14 \times 2$

= 2464 સેમી.^{2}

ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 14^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 14$

$= \frac{4}{3} \times 22 \times 14 \times 14 \times 2$

$= \frac{34496}{3}$ સેમી.^{3}

$= 11498\frac{2}{3}$ સેમી.^{3}

સવાલ 9) એક ગોળનું ઘનફળ 38808 સેમી.^{3} છે. ગોળાની ત્રિજ્યા અને વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો ?

જવાબ : અહીં, ગોળનું ઘનફળ = 38808 સેમી.^{3} આપેલ છે.

ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$38808 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$38808 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times r^3$$

$$r^3 = 38808 \times \frac{3}{4} \times \frac{7}{22}$$

$$r^3 = 9261$$

$\sqrt[3]{r^3} = \sqrt[3]{9261}$ (બંને બાજુ ઘનમૂળ લેતાં)

$$\sqrt[3]{r^3} = \sqrt[3]{21^3}$$

r = 21 સેમી.^{3}

ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times 21^2$$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

$$= 4 \times 22 \times 21 \times 3$$

= 5544 સેમી.^{2}

સવાલ 10) 28 સેમી. ત્રિજ્યાવાળા ધાતુના એક ગોળાને ઓગળીને તેમાંથી 7 સેમી. ત્રિજ્યાવાળા કેટલા ગોળા બનાવી શકાય?

જવાબ : અહીં, મોટા ગોળાની ત્રિજ્યા (r_1) = 28 સેમી. અને નાના ગોળાની ત્રિજ્યા (r_2) = 7 સેમી. આપેલી છે.

નાના ગોળાની સંખ્યા (ઘનફળ) = મોટા ગોળનું ઘનફળ

$y\left(\frac{4}{3}\pi {r_1}^3\right) = \frac{4}{3}\pi {r_2}^3$ (નાના ગોળાની સંખ્યાને y ધરીએ)

$$y \times {r_1}^3 = {r_2}^3$$

$$y\,(7 \times 7 \times 7) = 28 \times 28 \times 28$$

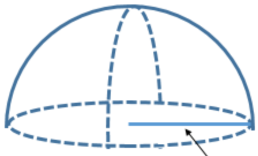
$$y = \frac{28}{7} \times \frac{28}{7} \times \frac{28}{7}$$

$$y = 4 \times 4 \times 4$$

$$y = 64$$

આમ, 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળા 64 ગોળા બનાવી શકાય.

અર્ધગોળો / ગોલક :



અર્ધગોળાના અગત્યના સૂત્ર :

ખુલ્લા અર્ધગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi r^2$

બંધ અર્ધગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 3\pi r^2$

અર્ધગોળાનું ઘનફળ $= \frac{2}{3}\pi r^3$

સવાલ 11) એક અર્ધગોળાકાર વાટકાનું ઘનફળ (ગુંજાશ) 2425.5 સેમી.^{3} છે, તો તેની ત્રિજ્યા અને વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો?

જવાબ : અહી, અર્ધગોળાકાર વાટકાનું ઘનફળ = 2425.5 સેમી.^{3} આપેલ છે.

તે પરથી,

અર્ધગોળાનું ઘનફળ $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$\therefore \quad \frac{2}{3}\pi r^3 = 2425.5$

$\therefore \quad \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times r^3 = 2425.5$

$\therefore \quad r^3 = 2425.5 \times \frac{3}{2} \times \frac{7}{22}$

$\therefore \quad r^3 = 2425.5 \times \frac{21}{44}$

$\therefore \quad r^3 = \frac{50935.5}{44}$

$\therefore \quad r^3 = 1157.625$

$\therefore \quad r = 10.5$ સેમી.

ખુલ્લા અર્ધગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2 \times \frac{22}{7} \times 10.5^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 10.5 \times 10.5$

$= 2 \times 22 \times 10.5 \times 1.5$

$= 693$સેમી.^{2}