

14. ત્રિકોણની સમરૂપતા



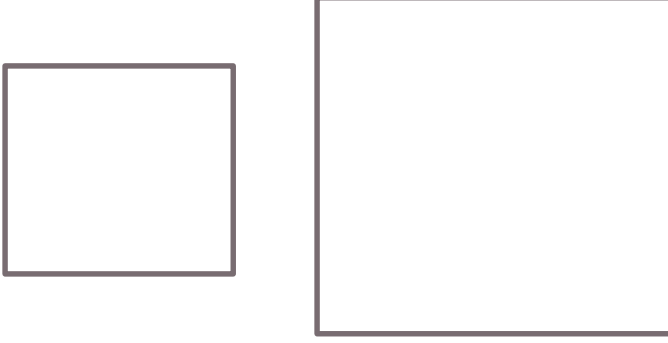
PRATHAM EDUCATION FOUNDATION

સમરૂપ :

- જે કોઈ પણ બે વસ્તુ / આકૃતિઓના કદ વિવિધ હોય પરંતુ તેમની અનુરૂપ બાજુઓના માપ પ્રમાણમાં અને અનુરૂપ ખૂણાઓના માપ સમાન હોય તેને સમરૂપ કહેવાય છે.

દા.ત.

અહીં જે બંને આકૃતિઓ આપવા આવી છે તે ચોરસ છે જે બંને ના આકારના વિવિધ છે પરંતુ તેમની બાજુઓના માપ પ્રમાણમાં આપવામાં આવ્યા છે.



સમરૂપતા માટેનો સંકેત : ~

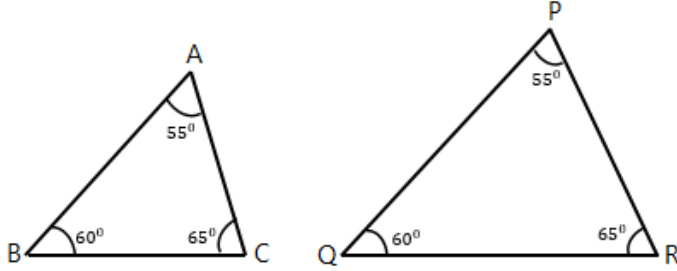
લખાય : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

વંચાય : ત્રિકોણ ABC સમરૂપ ત્રિકોણ PQR

સમરુપતા માટેની વિવિધ શરત :

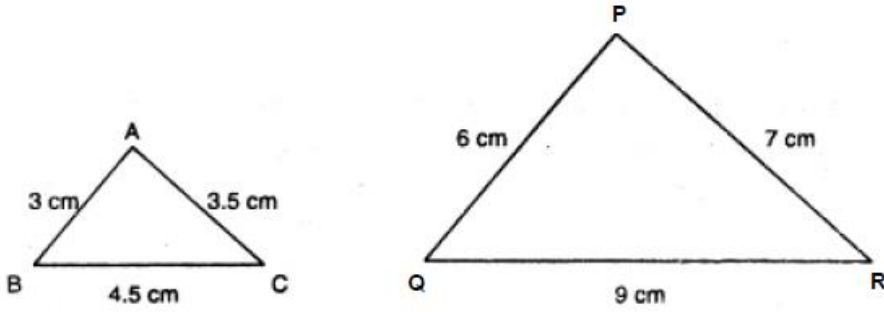
1) ખૂ.ખૂ.ખૂ.

જો બે ત્રિકોણમાં અનુરૂપ ખુણાઓ સમાન હોય, અને બાજુઓના માપ સમ પ્રમાણમાં હોય તો બંને ત્રિકોણો સમરૂપ બને છે.



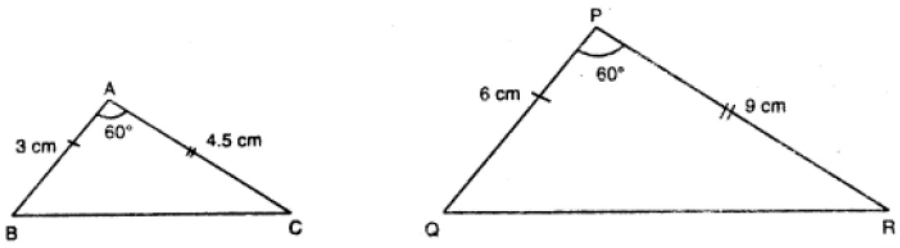
2) બા.બા.બા.

જો બે ત્રિકોણમાં અનુરૂપ બાજુઓના માપ સમ પ્રમાણમાં હોય, તો બંને ત્રિકોણો સમરૂપ બને છે.



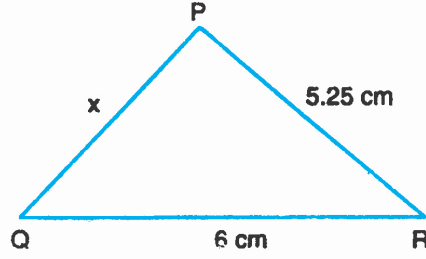
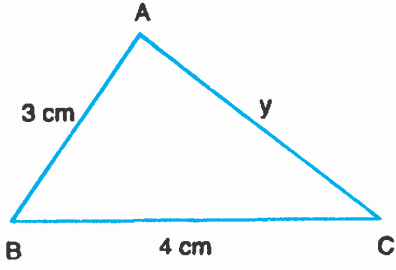
3) બા.ખૂ.બા.

જો ત્રિકોણનો એક ખૂણો બીજા ત્રિકોણના એક અનુરૂપ ખૂણા બરાબર હોય અને આ ખૂણા ધરાવતી બાજુઓ પ્રમાણમાં હોય, તો ત્રિકોણ એકરૂપ થાય છે.



તમારી પ્રગતિ ચકાસો -1

1) જો $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ તો x અને y ની કિંમત શોધો :



$$\Delta ABC \sim \Delta PQR$$

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

$$\therefore \frac{3}{x} = \frac{4}{6}$$

$$\therefore 4x = 18$$

$$\therefore x = \frac{18}{4}$$

$$\therefore x = 4.5$$

$$\therefore \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

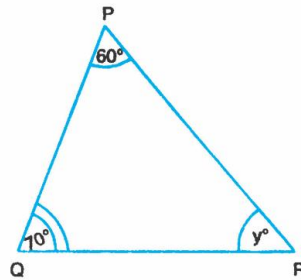
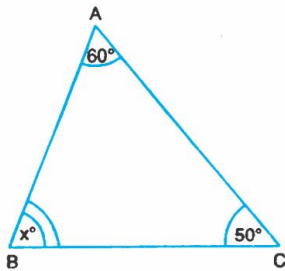
$$\therefore \frac{4}{6} = \frac{y}{5.25}$$

$$\therefore 6y = 21$$

$$\therefore y = \frac{21}{6}$$

$$\therefore y = 3.5$$

2)



$$\Delta ABC \sim \Delta PQR$$

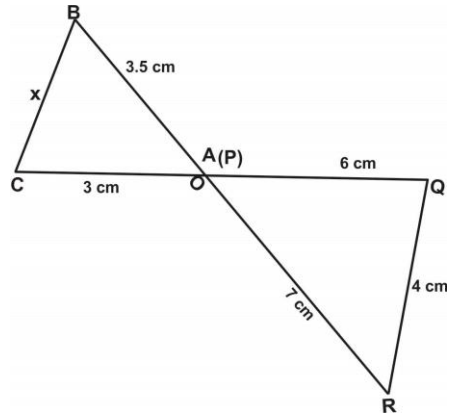
$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} \text{ અને } \angle A = \angle P \quad \angle B = \angle Q \text{ અને } \angle C = \angle R$$

$$\angle B = \angle Q \quad \angle C = \angle R$$

$$\therefore \angle B = 70^\circ \quad \therefore 50^\circ = y$$

$$\therefore x = 70^\circ \text{ અને } y = 50^\circ$$

3)



$\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

$$\therefore \frac{3.5}{6} = \frac{x}{4}$$

$$\therefore 14 = 6x$$

$$\therefore x = \frac{7}{3} \text{ सेमी.}$$

अथवा

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

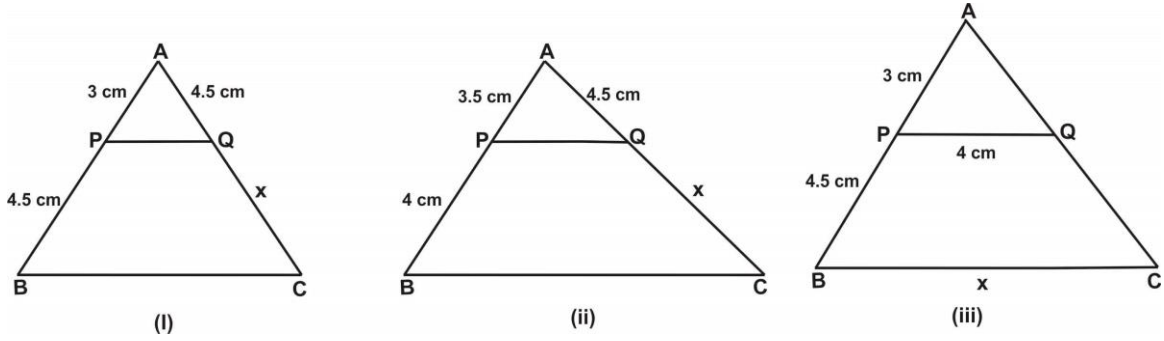
$$\therefore \frac{3.5}{6} = \frac{x}{4} = \frac{3}{7}$$

$$\therefore 7x = 12$$

$$\therefore x = \frac{12}{7} \text{ सेमी.}$$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો -2

4) આપેલી આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે (i), (ii) અને (iii) માં $PQ \parallel BC$ દરેકમાં x ની કિંમત શોધો.



આપણે જાણીએ છીએ કે જો એક રેખા ત્રિકોણની એકબજુને સમાંતર દોરવામાં આવે, તો ત્રિકોણની બીજી બે બાજુઓ પ્રમાણમાં વિભાગાય છે. અહીં $PQ \parallel BC$ આપેલ છે.

$$(i) \quad \therefore \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$$

$$\therefore \frac{3}{4.5} = \frac{4.5}{x}$$

$$\therefore 3x = \frac{20.25}{0}$$

$$\therefore x = \frac{20.25}{3}$$

$$\therefore x = 6.75$$

$$(ii) \quad \therefore \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$$

$$\therefore \frac{3.5}{4} = \frac{5.25}{x}$$

$$\therefore 3.5x = 21$$

$$\therefore x = \frac{21}{3.5}$$

$$\therefore x = 6$$

5) જો કોઈ રેખા ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓને તે જ પ્રમાણમાં વિભાગે તો તે રેખા ત્રિકોણની ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે.

જવાબ :

જો ΔABC માં $PQ \parallel BC$

તો $\Delta ABC \sim \Delta APQ$

$$\therefore \frac{AB}{AP} = \frac{BC}{PQ}$$

$$\therefore \frac{7.3}{3} = \frac{x}{4}$$

$$\therefore 3x = 30$$

$$\therefore x = 10$$

6) આપેલ આકૃતિમાં DE, BC ને સમાંતર છે કે નહીં તે શોધો. તમારા જવાબ માટે કારણો આપો.

જવાબ :

$$(i) \frac{AB}{DB} = \frac{3}{4.5} = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3} \text{ સમીકરણ.....(1)}$$

$$\frac{AE}{EC} = \frac{4.5}{5.75} = \frac{450}{575} = \frac{18}{23} \text{ સમીકરણ.....(2)}$$

સમીકરણ (1) અને (2) પરથી,

$$\frac{AD}{DB} \neq \frac{AE}{EC}$$

\therefore DE અને BC સમાંતર નથી.

$$(ii) \frac{AB}{DB} = \frac{BC}{DE}$$

$$\frac{4}{2} = \frac{6}{3}$$

$$\therefore 2 = 2$$

\therefore DE || BC છે.

$$(iii) \frac{AB}{AD} = \frac{6}{2} = 3$$

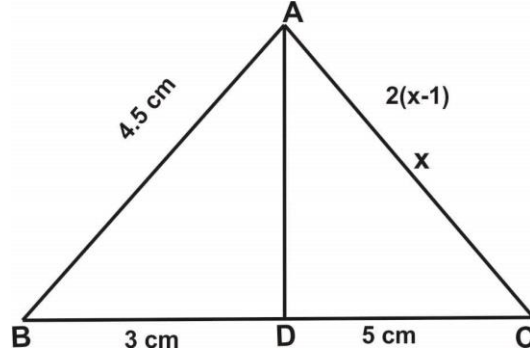
$$\frac{BC}{DE} = \frac{7.5}{2.5} = 3$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$$

\therefore DE || BC છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો -3

7) આપેલી આકૃતિમાં AD, $\angle A$ નો દ્વીભાજક છે, જે BC ને D માં મળે છે. જો AB =4.5 સેમી., BD =3 સેમી. તો x શોધો.



જવાબ :

આપણે જાણીએ છીએ કે ત્રિકોણમાં ખૂણાનો અંદરનો દ્વીભાજક સામેની બાજુને ખૂણો ધરાવતી બાજુઓના પ્રમાણમાં વિભાગે છે :

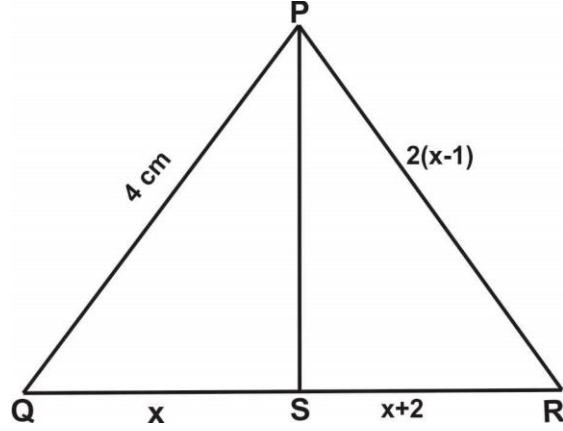
$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \frac{3}{5} = \frac{4.5}{x}$$

$$\therefore 3x = 22.5$$

$$\therefore x = 7.5$$

8) નીચે આપેલી આકૃતિમાં PS એ ΔPQR ના $\angle P$ નો અંતઃ દ્વીભાજક છે, અહીં કેટલીક બાજુઓના પરિણામો આપેલા છે તો x શોધો.



જવાબ :

$$\Delta PQS \sim \Delta PRS$$

$$\therefore \frac{PQ}{PR} = \frac{QS}{SR}$$

$$\therefore \frac{4}{2(x-1)} = \frac{x}{x+2}$$

$$\therefore 4x + 8 = 2x^2 - 2x$$

$$\therefore 2x^2 - 2x - 4x - 8 = 0$$

$$\therefore 2x^2 - 6x - 8 = 0 \text{ (બંને બાજુ 2 વડે ભાગતાં)}$$

$$\therefore x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\therefore x^2 - 4x + x - 4 = 0$$

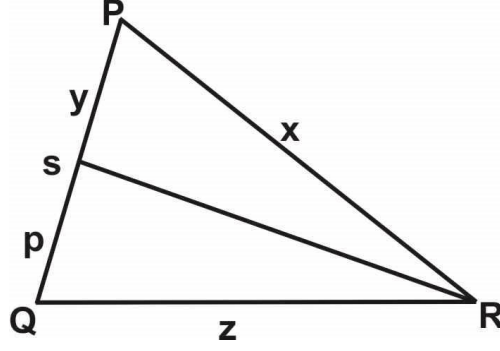
$$\therefore x - (x - 4) + 1(x - 4)$$

$$\therefore (x - 4) = 0 \quad \text{or} \quad (x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ અથવા } x = -1 \text{ જ્યાં } x \neq -1$$

$$\therefore x = 4$$

9) આપેલી આકૃતિમાં RS એ ΔPQR ના $\angle R$ નો અંતઃદ્વિભાજક છે. આપેલ પરિણામ માટે P, QS ની લંબાઈને x, y અને z માં અભિવ્યક્ત કરો.



જવાબ :

RS એ ΔPQR માં $\angle R$ નો અંતઃદ્વિભાજક છે.

$$\therefore \frac{PS}{SQ} = \frac{PR}{QR}$$

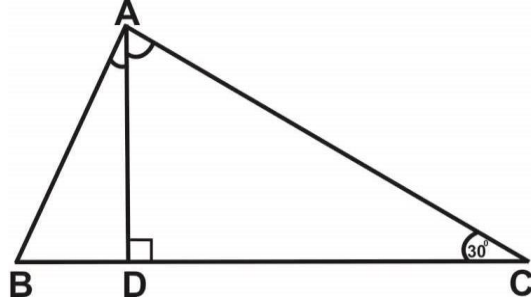
$$\therefore \frac{y}{p} = \frac{x}{z}$$

$$\therefore yz = px$$

$$\therefore p = \frac{yz}{x} \text{ (જ્યાં } x \neq 0 \text{ નથી)}$$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો - 4

10) નીચે આપેલી આકૃતિમાં ABC એ કાટકોણ ત્રિકોણ છે. જેમાં $\angle A = 90^\circ$ અને $\angle C = 30^\circ$ દર્શાવો કે,
 $\Delta DAB \sim \Delta DCA \sim \Delta ACB$



જવાબ :

(1) ΔDAB અને ΔACB માં

$\angle B = \angle B$ (સામાન્ય ખૂણો)

$\angle D = \angle A$ (દરેક 90°)

$\therefore \angle A = \angle C$

ત્રિકોણની સમરૂપતાની શરત ખૂ.ખૂ.ખૂ. દ્વારા

$\Delta DAB \sim \Delta ACB$ (1)

(2) ΔDCA અને ΔACB માં

$\angle C = \angle C$ (સામાન્ય ખૂણો)

$\angle D = \angle A$ (દરેક 90°)

$\therefore \angle DAC = \angle ABC$

\therefore ત્રિકોણની સમરૂપતાની શરત ખૂ.ખૂ.ખૂ. દ્વારા

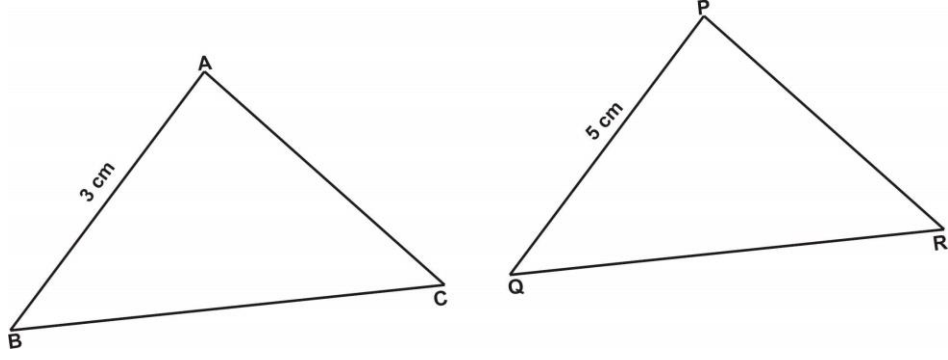
$\Delta DCA \sim \Delta ACB$ (2)

પરિણામ (1) અને (2) પરથી,

$\Delta DAB \sim \Delta DCA \sim \Delta ACB$

11) બે સમરૂપ ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળનો ગુણોતર શોધો, જો અનુરૂપ બાજુઓ 3 સેમી., 5 સેમી. લંબાઈની છે.

જવાબ :



ધારોકે $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$\therefore AB = 3\text{cm}$ અને $PQ = 5\text{cm}$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ}}{\Delta PQR \text{ નું ક્ષેત્રફળ}} &= \frac{AB^2}{PQ^2} \\ &= \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}\end{aligned}$$

તેથી, બે સમરૂપ ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળનો ગુણોતર 9:25 છે.

12) $\triangle ABC$ એક ત્રિકોણ છે. જેમાં $DE \parallel BC$. જો $AB = 6$ સેમી. અને $AD = 2$ સેમી. તો $\triangle ADE$ અને સમલંબ ચતુષ્કોણ $DBCE$ નાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોતર શોધો.

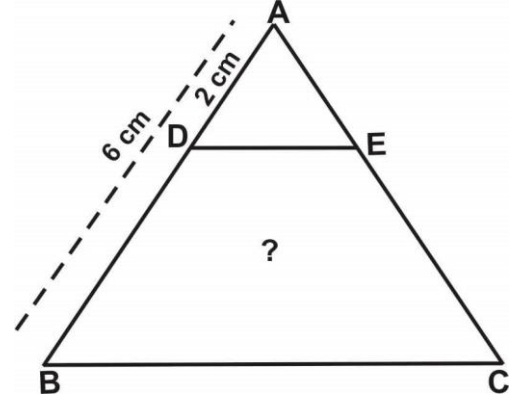
જવાબ :

આપેલી માહિતીના આધારે આકૃતિ બનાવીએ અને તેને સમજીએ.

$AB = 6\text{cm}$ અને

$AD = 2\text{ cm}$ છે.

$$\therefore \frac{\triangle ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ}}{\triangle ADE \text{ નું ક્ષેત્રફળ}} = \frac{(AB)^2}{(AD)^2} = \frac{(6)^2}{(2)^2} = \frac{36}{4} = \frac{9}{1}$$



આપણે ચતુષ્કોણ $DBCE$ નું ક્ષેત્રફળ જાણવું છે.

$\therefore \triangle ABC$ નાં ક્ષેત્રફળ માંથી $\triangle ADE$ નું ક્ષેત્રફળ બાદ કરીએ.

$\triangle ABC$ નું ક્ષેત્રફળ - $\triangle ADE$ નું ક્ષેત્રફળ / $\triangle ADE$ નું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{9-1}{1}$$

$$= \frac{8}{1}$$

$$\therefore \text{સમલંબ ચતુષ્કોણ } DBCE \text{ નું ક્ષેત્રફળ} = \frac{8}{1}$$

આપણે $\triangle ADE$ અને સમલંબ ચતુષ્કોણ $DBCE$ ના ક્ષેત્રફળનો ગુણોતર શોધવાનો છે.

$$\therefore \frac{\triangle ADE \text{ નું ક્ષેત્રફળ}}{\square DBCE \text{ નું ક્ષેત્રફળ}} = \frac{1}{8}$$

\therefore આમ, $\triangle ADE$ અને સમલંબ ચતુષ્કોણ $DBCE$ ના ક્ષેત્રફળનો ગુણોતર 1:8 છે.

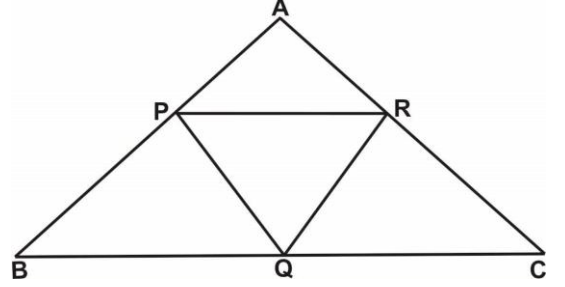
13) P, Q અને R એ ΔABC ની બાજુઓ AB, BC અને CA નાં અનુક્રમે મધ્યબિંદુઓ છે. દર્શાવો કે, ΔPQR નું ક્ષેત્રફળ ΔABC ના ક્ષેત્રફળનું $\frac{1}{4}$ (એક ચતુર્થાંશ છે)

જવાબ :

આપેલી માહિતીના આધારે આકૃતિ બનાવીને સમજાવે, મધ્યબિંદુઓ P, Q અને R ને જોડતાં ΔPQR , ΔAPR , ΔBPQ અને ΔCRQ એમ ચાર ત્રિકોણ બને છે.

આપણે સાબિત કરવાનું છે,

$$\Delta PQR \text{ નું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{4} \Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ}$$



સાબિતી : ΔBPQ અને ΔPQR માં,
 $BP \parallel QR$ છે અને PR છેદીકા છે.

$$\therefore \angle BPQ = \angle QPR \text{ (યુગ્મકોણની જોડ)}$$

$$PR = BQ \text{ (કારણ કે } BP \parallel QR)$$

$$PQ = PQ \text{ (સામાન્ય બાજુ)}$$

\therefore ત્રિકોણની એકરૂપતાની બા.ખુ.બા. શરત દ્વારા

$$\Delta BPQ \cong \Delta PQR$$

$$\therefore \Delta BPQ \text{ નું ક્ષેત્રફળ} = \Delta PQR \text{ નું ક્ષેત્રફળ} \dots\dots(1)$$

આવીજ રીતે,

ΔAPR અને ΔPQR માં,

$AP \parallel QR$ છે અને PR છેદીકા છે.

$$\therefore \angle ARP = \angle QPR \text{ (યુગ્મકોણની જોડ)}$$

$$AR = PQ \text{ (કારણ કે } AP \parallel QR)$$

$$PR = PR \text{ (સામાન્ય બાજુ)}$$

\therefore ત્રિકોણની એકરૂપતાની બા.ખુ.બા. શરત દ્વારા

$$\Delta APR \cong \Delta PQR$$

$$\therefore \Delta APR \text{ નું ક્ષેત્રફળ} = \Delta PQR \text{ નું ક્ષેત્રફળ} \dots\dots(2)$$

હવે,

ΔPQR અને ΔRQC માં

$PR \parallel QC$ છે અને RQ છેદીકા છે.

$$\therefore \angle PRQ = \angle RQC \text{ (યુગ્મકોણની જોડ)}$$

$$PQ = RC \text{ (કારણ કે } AP \parallel QR)$$

$$QR = QR \text{ (સામાન્ય બાજુ)}$$

\therefore ત્રિકોણની એકરૂપતાની બા.ખુ.બા. શરત દ્વારા

$$\Delta PQR \cong \Delta RQC$$

$$\therefore \Delta RQC \text{ નું ક્ષેત્રફળ} = \Delta PQR \text{ નું ક્ષેત્રફળ} \dots\dots(3)$$

સમીકરણ (1), (2) અને (3) પરથી,

આમ,

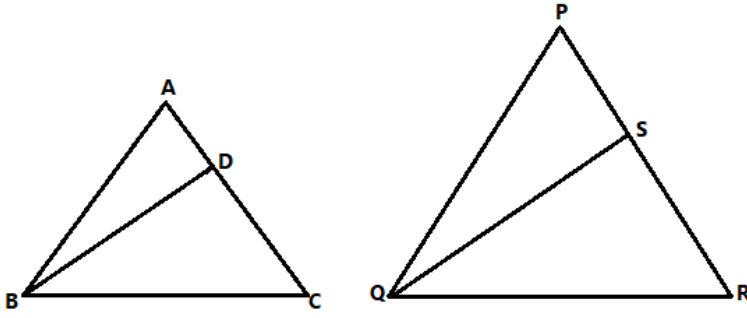
$$\Delta PQR \text{ નું ક્ષેત્રફળ} = \Delta APR \text{ નું ક્ષેત્રફળ} + \Delta BPQ \text{ નું ક્ષેત્રફળ} + \Delta RQC \text{ નું ક્ષેત્રફળ} + \Delta PQR \text{ નું ક્ષેત્રફળ}$$

$$\therefore \Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ} = 4 \Delta PQR \text{ નું ક્ષેત્રફળ}$$

$$\therefore \Delta PQR \text{ નું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{4} \Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ}$$

14) બે સમરૂપ ત્રિકોણો ABC અને PQR માં જો અનુરૂપ વેધ AD અને PS ગુણોતર 4:9 માં હોય, તો ΔABC અને ΔPQR નાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોતર શોધો. (સંકેત : $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PS} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{PR}$ નો ઉપયોગ કરો)

જવાબ :
આપેલી માહિતી પરથી આકૃતિ બનાવીએ,



$$\text{સંકેત પ્રમાણે : } \frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PS} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{PR}$$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$ માં,

$$\therefore \frac{\Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ}}{\Delta PQR \text{ નું ક્ષેત્રફળ}} = \frac{AD^2}{PS^2}$$

$$= \frac{(4)^2}{(9)^2}$$

$$= \frac{16}{81}$$

$\therefore \Delta ABC$ અને ΔPQR ના ક્ષેત્રફળનો ગુણોતર 16 : 81 થાય.

15) જો બે સમરૂપ ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળોનો ગુણોતર 16:25 હોય, તો તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોતર શોધો.

જવાબ :

ધારોકે અહીં બે સમરૂપ ત્રિકોણ ABC અને PQR છે.

∴ તેમના ક્ષેત્રફળનો ગુણોતર તેમની અનુરૂપ બાજુઓના વર્ગોના ગુણોતર બરાબર હોય.

$$\therefore \frac{\Delta ABC \text{નું ક્ષેત્રફળ}}{\Delta PQR \text{નું ક્ષેત્રફળ}} = \frac{AB^2}{PQ^2}$$

$$\therefore \frac{16}{25} = \frac{AB^2}{PQ^2}$$

$$\therefore \frac{4}{5} = \frac{AB}{PQ} \quad (\text{બંને બાજુ વર્ગમૂળ કાઢતાં})$$

આમ, ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓનો ગુણોતર 4:5 છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો - 5

16) અમુક ત્રિકોણોની બાજુઓ નીચે આપેલ છે, તે પૈકી ક્યાં કાટકોણ ત્રિકોણો છે તે નક્કી કરો.
[AB = c, BC = a, CA = b]

1) a = 4 સેમી. b = 5 સેમી. c = 3 સેમી.

જવાબ :

$$a^2 + c^2 = b^2$$

$$\therefore (4)^2 + (3)^2 = (5)^2$$

$$\therefore 16 = 9 = 25$$

$$\therefore 25 = 25$$

આમ, આપેલ ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

2) a = 1.6 સેમી. b = 3.8 સેમી. c = 4 સેમી.

જવાબ :

$$a^2 + b^2 = (c)^2$$

$$\therefore (1.6)^2 + (3.8)^2 = (4)^2$$

$$\therefore 2.56 + 14.44 = 16$$

$$\therefore 17.00 = 16$$

$$\therefore 17 \neq 16$$

આપેલ ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ નથી.

3) a = 9 સેમી. b = 16 સેમી. c = 18 સેમી.

જવાબ :

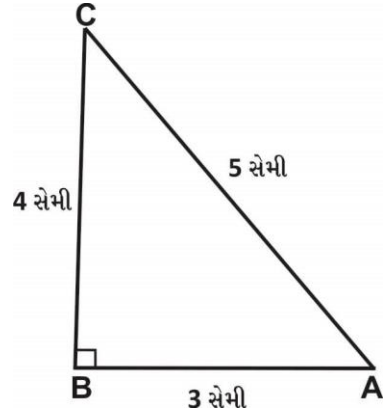
$$a^2 + b^2 = (c)^2$$

$$\therefore (9)^2 + (16)^2 = (18)^2$$

$$\therefore 81 + 256 = 324$$

$$\therefore 337 \neq 324$$

આપેલ ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ નથી.



4) $a = 7$ સેમી. $b = 24$ સેમી. $c = 25$ સેમી.

જવાબ :

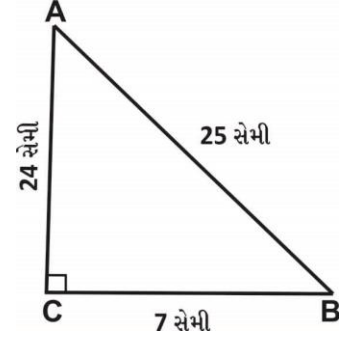
$$a^2 + b^2 = (c)^2$$

$$\therefore (7)^2 + (24)^2 = (25)^2$$

$$\therefore 49 + 576 = 625$$

$$\therefore 625 = 625$$

આપલે ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.



17) 6 મી. અને 11 મી. ઊંચાઈના બે વાંસ સમતલ જમીન પર ઉભા છે તેમનાં નીચલા તળિયા વચ્ચેનું અંતર 12 મી. હોય તો તેમની ટોચ વચ્ચેનું અંતર શોધો.

જવાબ :

આપેલ દાખલો સમજવા આકૃતિ દોરીએ.

AC = 6 મી. ઊંચાઈ વાળો વાંસ

BD = 12 મી. ઊંચાઈ વાળો વાંસ

AB = નીચલા તળિયા વચ્ચેનું અંતર, 12 મી.

બિંદુ C થી BD પર લંબ CE દોરો.

$$\therefore AB = CE$$

$$\therefore CE = 12 \text{ મી. (આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ)}$$

$$AC = BE$$

$$\therefore 6 \text{ m} = BE \text{ (આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ)}$$

$$DE = BD - BE$$

$$= 11 - 6$$

$$\therefore DE = 5 \text{ મી. (આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ)}$$

વેતાંકાટકોણ ત્રિકોણ DEC માં,

$$DE^2 + EC^2 = CD^2$$

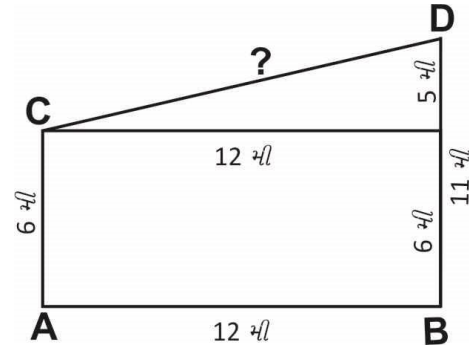
$$\therefore (5)^2 + (12)^2 = CD^2$$

$$\therefore 25 + 144 = CD^2$$

$$\therefore 169 = CD^2$$

$$\therefore CD = 13 \text{ m (વર્ગમૂળ લેતાં)}$$

આમ, બે વાસની ટોચ વચ્ચેનું અંતર 13 મીટર છે.



18) 10 સેમી. બાજુવાળા ચોરસના વિકર્ણની લંબાઈ શોધો.

જવાબ :

સવાલને સમજવા માટે આપણે આકૃતિ દોરીએ.

ધારોકે ABCD 10 સેમી લંબાઈ વાળો ચોરસ છે.

AB = BC = CD = AD = 10 સેમી.

વિકર્ણ AC ને x ધરીએ.

પાયથાગોરસના પ્રમેય મુજબ,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\therefore AC^2 = (10)^2 + (10)^2$$

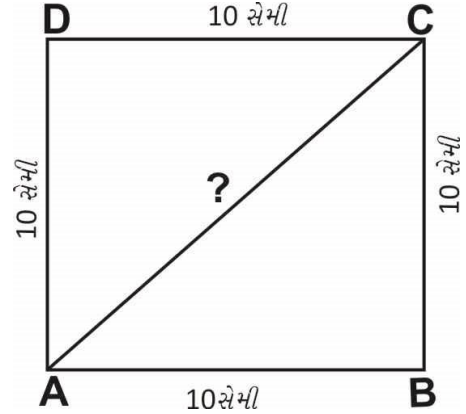
$$\therefore x^2 = 100 + 100$$

$$\therefore x^2 = 200$$

$$\therefore x = \sqrt{100 \times 2}$$

$$\therefore x = 10\sqrt{2}$$

આમ, 10 સેમી. લંબાઈ વાળા ચોરસના વિકર્ણની લંબાઈ $10\sqrt{2}$ સેમી. થાય.



19) $\angle C$ લઘુકોણ છે અને $AD \perp BC$ દર્શાવો કે, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC$

જવાબ :

આપેલ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ,

$AD \perp BC$ અને $\angle C$ લઘુકોણ છે.

સાધ્ય : $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC$

સાબિતી : $\triangle ABD$ એ એક કાટકોણ ત્રિકોણ છે. જેમાં, $\angle D$ કાટખૂણો છે.

$$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2 \dots \dots \dots (1)$$

$\triangle ACD$ માં $\angle D$ કાટખૂણો છે.

$$\therefore AC^2 = AD^2 + DC^2 \dots \dots \dots (2)$$

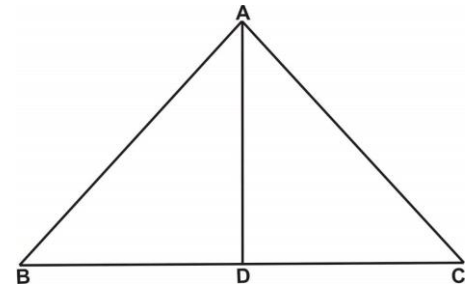
પરિણામ (1) પરથી,

$$AB^2 = AD^2 + (BC - DC)^2$$

$$= AD^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC + DC^2$$

$$= AD^2 + DC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC$$



(સમીકરણ (2) દ્વારા)

(પાયથાગોરસના પ્રમેયનું વિસ્તરણ)

20) C આગળ કાટકોણ છે તેવા ΔAB ની બાજુઓ CA અને CB પરનાં બિંદુઓ અનુક્રમે P અને Q છે. સાબિત

$$\text{કરો કે, } AQ^2 + BP^2 = AB^2 + PQ^2$$

જવાબ :

આપેલી માહિતી મુજબ આકૃતિ દોરીએ.

ΔABC માં $\angle C$ કાટખૂણો છે. બાજુ CA અને CB પર અનુક્રમે P અને Q બિંદુ છે.

$$\therefore CP = AP \frac{1}{2} AC$$

$$BQ = QC \frac{1}{2} BC$$

$$\text{સાધ્ય : } AQ^2 + BP^2 = AB^2 + PQ^2$$

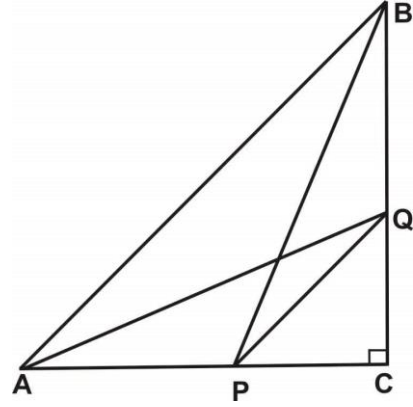
સાબિતી : કાટકોણ ΔBCA માં,
 $BC^2 + AC^2 = AB^2 \dots\dots\dots (1)$

કાટકોણ ΔQCP માં,
 $PQ^2 = QC^2 + PC^2 \dots\dots\dots (2)$

કાટકોણ ΔACQ માં,
 $AQ^2 = AC^2 + QC^2 \dots\dots\dots (3)$

કાટકોણ ΔBCP માં
 $BP^2 = BC^2 + PC^2 \dots\dots\dots (4)$

પરિણામ (3) અને (4) સરવાળો કરતાં,
 $AQ^2 + BP^2 = AC^2 + QC^2 + BC^2 + PC^2$
 $= AC^2 + BC^2 + CQ^2 + CP^2$
 $= AB^2 + PQ^2$ (પરિણામ(1) અને (2) પરથી,
 $\therefore AQ^2 + BP^2 = AB^2 + PQ^2$



21) B આગળ કાટકોણ હોય તેવા કાટકોણ ΔABC ની બાજુઓ AB અને AC પરના મધ્યબિંદુઓ L અને M છે. દર્શાવો કે $4\angle C^2 = AB^2 + AB^2 + 4BC^2$

જવાબ :

આપેલી માહિતી મુજબ આકૃતિ દોરીએ.

ΔABC માં $\angle B$ કાટકોણ છે.

L અને M બંને AB અને BC ના મધ્યબિંદુ છે.

સાધ્ય : $4\angle C^2 = AB^2 + AB^2 + 4BC^2$

સાબિતી : કાટકોણ ΔLBC માં,

$$LC^2 = LB^2 + BC^2$$

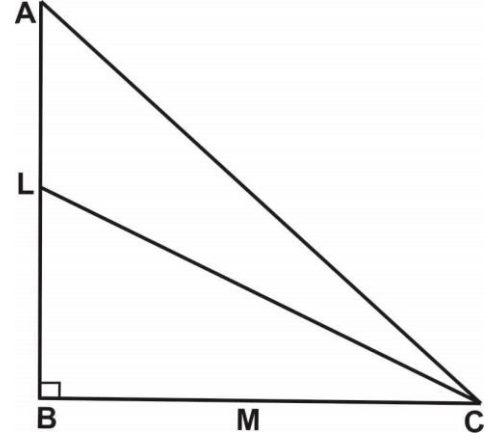
પરંતુ, $LB^2 = AL^2 = \frac{1}{2} AB$

$$\therefore LC^2 = \left(\frac{1}{2} AB\right)^2 + BC^2$$

$$\therefore LC^2 = \frac{1}{4} AB^2 + BC^2$$

$$\therefore 4LC^2 = AB^2 + 4BC^2 \text{ (પદને 4 વડે ગુણતાં)}$$

$$\text{આમ, } 4LC^2 = AB^2 + 4BC^2$$



22) PQR એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે જેમાં $\angle Q = 90^\circ$ તો સાબિત કરો કે, $PR^2 = 2PQ^2$

જવાબ :

આપેલી માહિતી મુજબ આકૃતિ દોરીએ.

ΔPQR કાટકોણ છે. જેમાં $\angle Q = 90^\circ$ અને $PQ = QR$ આપેલ છે.

સાધ્ય : $PR^2 = 2PQ^2$

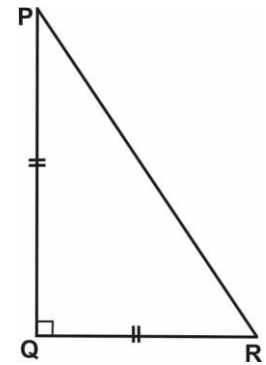
સાબિતી : કાટકોણ ΔPQR માં,

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$

પરંતુ, $PQ = QR$

$$\therefore PR^2 = PQ^2 + PQ^2$$

$$\therefore PR^2 = 2PQ^2$$



23) એક સીડી દીવાલે એવી રીતે મુકવામાં આવી છે જેથી તેની ટોચ દીવાલની 4 મીટર ઊંચાઈએ પહોંચે છે, જો સીડીનો તળભાગ દીવાલથી 3 મી દુર હોય તો સીડીની લંબાઈ શોધો.

જવાબ :

આપેલી માહિતી પરથી આકૃતિ દોરીએ.

ધારોકે AC = સીડી AB = દીવાલ અને BC = તળભાગ છે.

AB = દીવાલની ઊંચાઈ 4 મીટર

BC = તળભાગ દીવાલથી 3 મીટર છે.

AC = સીડીની ઊંચાઈ શોધવાની છે તેને આપણે x ધારીએ.

કાટકોણ ΔABC માં,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

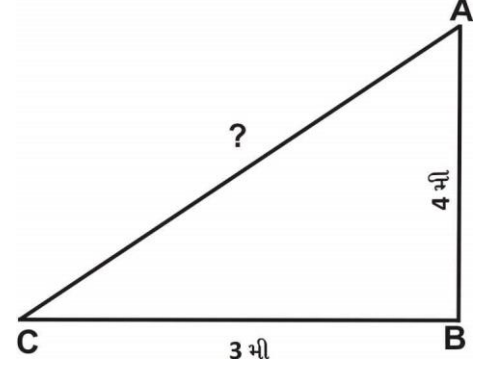
$$x^2 = (4)^2 + (3)^2$$

$$\therefore x^2 = 16 + 9$$

$$\therefore x = 25$$

$$\therefore x = 5 \text{ (બંને બાજુ વર્ગમૂળ લેતાં)}$$

આમ, સીડીની લંબાઈ 5 મીટર થાય.



સત્રાંત સ્વાધ્યાય

24) બે બહુકોણની સમરૂપતા માટેની શરતો લખો?

જવાબ :

કોઈ બે બહુકોણના અનુરૂપ ખૂણા સમાન અને અનુરૂપ બાજુઓ પ્રમાણમાં હોય તો બે બહુકોણ સમરૂપ હોય છે.

25) નીચેનાં માંથી ક્યાં કીસામાં ત્રિકોણ ABC અને ત્રિકોણ PQR સમરૂપ છે :

(i) $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 80^\circ$, $\angle P = 40^\circ$, $\angle Q = 60^\circ$, $\angle R = 80^\circ$

જવાબ :

અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન છે.

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$

$\angle A = \angle P$ $\angle B = \angle Q$ અને $\angle C = \angle R$ છે.

(ii) $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $\angle P = 50^\circ$, $\angle Q = 60^\circ$, $\angle R = 70^\circ$

જવાબ :

અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન નથી.

$\angle A = \angle P$ $\angle B \neq \angle Q$ અને $\angle C \neq \angle R$

માટે બંને ત્રિકોણ સમરૂપ નથી.

(iii) $AB = 2.5$ સેમી. $BC = 4.5$ સેમી. $CA = 3.5$ સેમી. $PQ = 5$ સેમી. $QR = 9.0$ સેમી. $RP = 7.0$ સેમી.

જવાબ :

અનુરૂપ બાજુઓ પ્રમાણમાં છે.

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$ થાય.

(iv) $AB = 3$ સેમી. $BC = 4$ સેમી. $CA = 5$ સેમી. $PQ = 4.5$ સેમી. $QR = 7.5$ સેમી. $RP = 6$ સેમી.

જવાબ :

અનુરૂપ બાજુઓ પ્રમાણમાં નથી.

$\frac{AB}{PQ} \neq \frac{BC}{QR} \neq \frac{CA}{PR}$

માટે બંને ત્રિકોણ સમરૂપ નથી.

26) નીચે આપેલી આકૃતિમાં $AD = 3$ સેમી., $AE = 4.5$ સેમી. $DB = 4.0$ સેમી. તો CE શોધો. અહીં $DE \parallel BC$ આપેલ છે.

જવાબ :

આપેલી માહિતી પરથી આકૃતિ બનાવીએ.

$DE \parallel BC$ આપેલ છે.

$AD = 3$ સેમી. $AE = 4.5$ અને $DB = 4.0$ સેમી. આપેલ છે.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{CE}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{4.5}{CE}$$

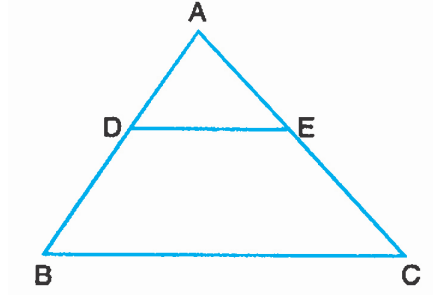
$$\therefore 3CE = 4 \times 4.5$$

$$3CE = 18$$

$$CE = \frac{18}{3}$$

$$CE = 6$$

આમ, $CE = 6$ સેમી. થાય.



27) નીચે આપેલી આકૃતિમાં $DE \parallel AC$ આપેલ છે તો x ની કિંમત શોધો ?

જવાબ :

આપેલી આકૃતિમાં $DE \parallel AC$, $AD = 3.0$ cm અને $BD = 2.0$ cm $BE = 3$ સેમી. આપેલ છે.

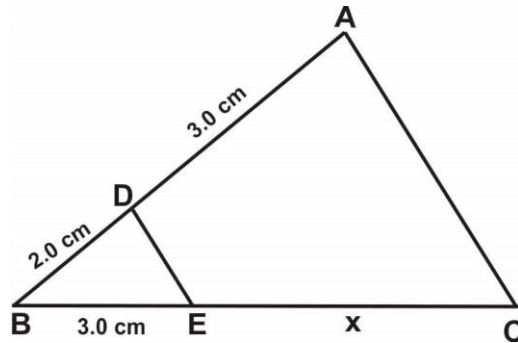
$$\frac{BE}{CE} = \frac{BD}{DA}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore 2x = 9$$

$$\therefore x = \frac{9}{2}$$

$$\therefore x = 4.5$$



28) ΔABC માં $AD = 5$ cm, $DB = 3$ cm. $AE = 2.5$ cm અને $EC = 1.5$ સેમી. $DE \parallel BC$ છે.તો તમારા જવાબ માટે કારણ આપો.

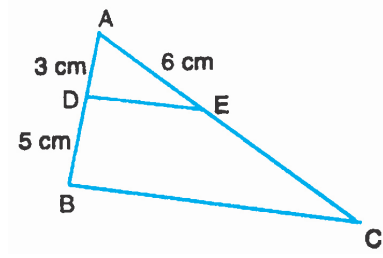
જવાબ :

આપેલી આકૃતિ પરથી,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{5}{3} \text{ અને}$$

$$\frac{AE}{EC} = \frac{2.5}{1.5} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



મૂળભૂત પ્રમાણ પ્રમેયના પ્રતિ પ્રમેયના આધારે (જો કોઈ રેખા ત્રિકોણની કોઈ પણ બાજુને તે જ પ્રમાણમાં વિભાગે તો, તે રેખા ત્રિકોણની ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે) તેથી, આપણે કહી શકીએ કે, $DE \parallel BC$ છે.

29) AD એ ΔABC ના $\angle A$ નો અંતઃ દ્વીભાજક છે.આપેલ પરિણામ માંથી x શોધો.

જવાબ :

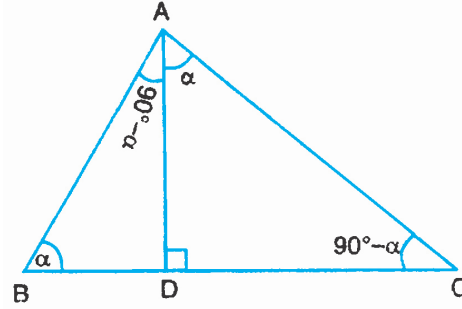
AD $\angle A$ નો અંતઃ દ્વીભાજક આપેલ છે.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{2.5}{3} = \frac{3.75}{x}$$

$$\therefore x = \frac{11.25}{2.5}$$

$$\therefore x = 4.5 \text{ cm}$$



30) બે સમરૂપ ત્રિકોણોની પરિમીતી 12 સેમી. અને 18 સેમી. છે, તો ΔABC ના ક્ષેત્રફળનો ΔDEF ના ક્ષેત્રફળ સાથેનો ગુણોતર શોધો.

જવાબ :

આપેલી માહિતીમાં,

ΔABC ની પરિમીતી = 12 સેમી. અને

ΔDEF ની પરિમીતી = 18 સેમી. આપેલ છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\frac{\Delta ABC \text{ ની પરિમીતી}}{\Delta DEF \text{ ની પરિમીતી}} = \frac{\Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ}}{\Delta DEF \text{ નું ક્ષેત્રફળ}}$$

$$\therefore \frac{\Delta ABC \text{ ની પરિમીતી}}{\Delta DEF \text{ ની પરિમીતી}} = \frac{\Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ}}{\Delta DEF \text{ નું ક્ષેત્રફળ}}$$

$$\therefore \frac{12}{18} = \frac{\Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ}}{\Delta DEF \text{ નું ક્ષેત્રફળ}}$$

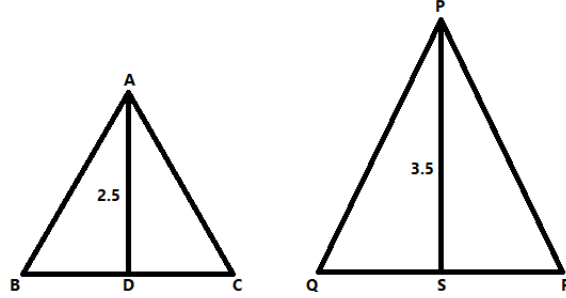
$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{\Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ}}{\Delta DEF \text{ નું ક્ષેત્રફળ}}$$

આમ, ΔABC ના ક્ષેત્રફળનો ΔDEF ના ક્ષેત્રફળ સાથેનો ગુણોતર 2:3 થાય.

31) બે સમરૂપ ત્રિકોણોનો વેધ $AD = 2.5$ સેમી અને $PS = 3.5$ સેમી લંબાઈના છે. તો ΔABC ના ક્ષેત્રફળ અને ΔPQR ના ક્ષેત્રફળનો ગુણોતર શોધો.

જવાબ :

આપેલ માહિતી માં વેધ $AD = 2.5$ સેમી. અને $PS = 3.5$ સેમી આપેલ છે.



$$\begin{aligned} \therefore \frac{\Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ}}{\Delta PQR \text{ નું ક્ષેત્રફળ}} &= \frac{AD^2}{PS^2} \\ &= \frac{(2.5)^2}{(3.5)^2} \\ &= \frac{(5)^2}{(7)^2} \\ &= \frac{25}{49} \end{aligned}$$

આમ, ΔABC ના ક્ષેત્રફળ અને ΔPQR ના ક્ષેત્રફળનો ગુણોતર 25 : 49 થશે.

32) નીચેનાં પૈકી ક્યાં ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ છે :

(i) $AB = 5$ cm $BC = 12$ cm $CA = 13$ cm

જવાબ:

$$\therefore AB^2 + AC^2 = AC^2$$

$$\therefore (5)^2 + (12)^2 = (13)^2$$

$$\therefore 25 + 144 = 169$$

આ ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

(ii) $AB = 8$ cm $BC = 6$ cm $CA = 10$ cm

જવાબ:

$$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\therefore (8)^2 + (6)^2 = (10)^2$$

$$\therefore 64 + 36 = 100$$

આ ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

$$(iii) AB = 10 \text{ cm } BC = 5 \text{ cm } CA = 6 \text{ cm}$$

જવાબ :

$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2$$

$$\therefore (6)^2 + (5)^2 = (10)^2$$

$$\therefore 36 + 25 \neq 100$$

આ ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ નથી.

$$(iv) AB = 25 \text{ cm } BC = 24 \text{ cm } CA = 7 \text{ cm}$$

જવાબ:

$$\therefore AB^2 + BC^2 = CA^2$$

$$\therefore (25)^2 = (24)^2 + (7)^2$$

$$625 = 576 + 49$$

આ ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

$$(v) AB = a^2 + b^2 \quad BC = 2ab \quad CA = a^2 - b^2$$

જવાબ:

$$\therefore BC^2 + CA^2 = AB^2$$

$$\therefore (2ab)^2 + (a^2 - b^2)^2 = (a^2 + b^2)^2$$

$$4a^2 b^2 + a^4 b^4 - 2a^2 b^2 = a^4 + b^4 + 2a^2 b^2$$

આ ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

33) $2a$ બાજુ વાળા સમબાજુ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો?

જવાબ :

ધારોકે ABC સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

$$\therefore AB = BC = CA = 2a$$

હવે, $AD \perp BC$ દોરીએ.

$\triangle ADB \cong \triangle ADC$ (કાકબા શરત દ્વારા)

$$\therefore BD = DC = a \text{ (આકૃતિ પરથી)}$$

કાટકોણ $\triangle ADB$ માં,

$$AB^2 + AD^2 + BD^2$$

$$\therefore 2a^2 = AD^2 + (a)^2$$

$$\therefore 4a^2 = AD^2 + a^2$$

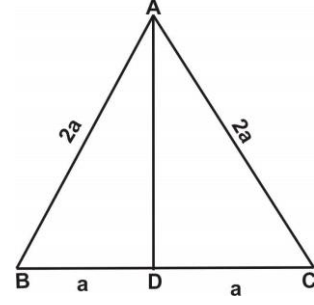
$$\therefore 4a^2 - a^2 = AD^2$$

$$\therefore 3a^2 = AD^2$$

$$\therefore AD = \sqrt{3a} \text{ (બંને બાજુ વર્ગમૂળ લેતાં)}$$

$$\begin{aligned} \text{સમબાજુ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ} &= \frac{2}{3} BC \times AD \\ &= \frac{1}{2} \times 2a \times \sqrt{3a} \end{aligned}$$

$$\text{સમબાજુ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ} = \sqrt{3a^2}$$



34) 12 મી અને 17 મી ઊંચાઈ ના બે વાંસ સમતલ જમીન પર ઉભા છે જો તેમનાં તળિયા વચ્ચેનું અંતર 12 મી છે તો તેમની ટોચ વચ્ચેનું અંતર શોધો.

જવાબ :

ધારોકે પહેલો વાંસ AB = 17 મી. અને

બીજો વાંસ CD = 12 મી. છે.

બંને વાંસના તળિયા BC = વચ્ચેનું અંતર 12 મી. છે.

$$\therefore BC = DE = 12 \text{ મી..... (1)}$$

$$BC = DE = 12 \text{ મી..... (2)}$$

$$\therefore AE = AB - EB$$

$$\therefore AE = 17 - 12$$

$$\therefore AE = 5 \text{ મી..... (3)}$$

પરિણામ (1), (2) અને (3) ના માપને આકૃતિમાં દર્શાવો.

બે વાંસ વચ્ચેની ઊંચાઈ AD = x ધરીએ.

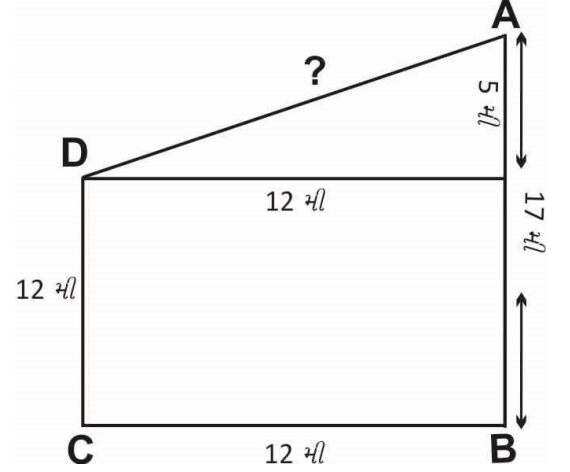
\therefore કાટકોણ $\triangle AED$ માં,

$$\begin{aligned} AD^2 &= AE^2 + ED^2 \\ &= (5)^2 + (12)^2 \\ &= 25 + 144 \end{aligned}$$

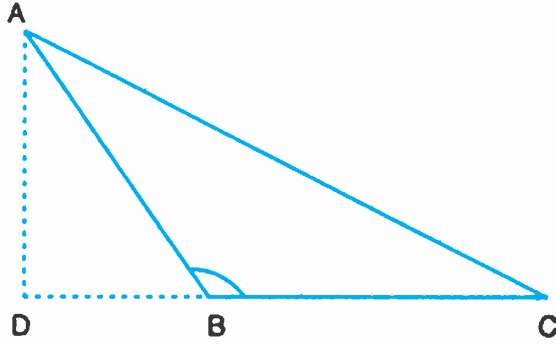
$$\therefore AD^2 = 169$$

$$\therefore AD = 13 \text{ મી.}$$

આમ, બંને વાંસની ટોચ વચ્ચેનું અંતર 13 મી. છે.



35) સાબિત કરો કે, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot BD$



પક્ષ : આપલ માહિતી મુજબ ΔABC માં $AD \perp BC$ જ્યાં બાજુ BC ને D સુધી લંબાવવા આવેલી છે.

સાધ્ય : $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot BD$

સાબિતી : કાટકોણ ΔADC માં,

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$\therefore AC^2 = AD^2 + (DB + BC)^2 \quad (\text{કારણ કે } DC = DB + BC)$$

$$= AD^2 + DB^2 + BC^2 + 2DB \cdot BC \dots \dots \dots (1)$$

કાટકોણ ΔADB માં,

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 \dots \dots \dots (2)$$

પરિણામ (1) અને (2) પરથી,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot BD$$

$$\text{આમ, } AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot BD$$

36) એક સીડી દીવાલને અડીને મૂકી છે અને તેની ટોચ જમીનથી 8 મી. ઊંચાઈએ પહોંચે છે. જો દીવાલ અને સીડીના તળિયા વચ્ચેનું અંતર 6 મી છે તો સીડીની લંબાઈ શોધો.

જવાબ :

આપેલ માહિતી મુજબ આકૃતિ બનાવીએ,

ધારોકે સીડીની લંબાઈ $AC = x$ મીટર છે.

દીવાલથી તળિયા વચ્ચેનું અંતર $BC = 6$ મીટર છે.

સીડીની ટોચ જમીનથી $AB = 8$ મીટર ઊંચાઈ એ છે.

∴ કાટકોણ $\triangle ABC$ માં,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

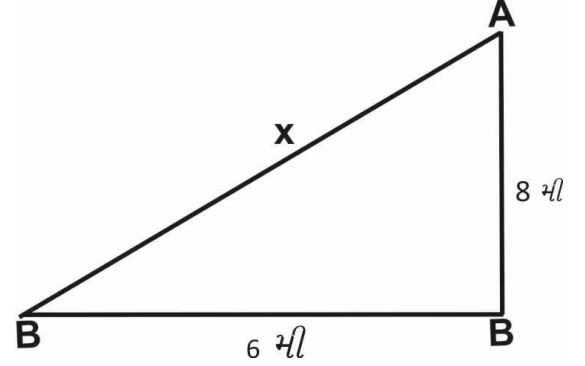
$$\therefore x^2 = 8^2 + 6^2$$

$$\therefore x^2 = 36 + 64$$

$$\therefore x^2 = 100$$

$$\therefore x = 10 \text{ મી. (બંને બાજુ વર્ગમૂળ લેતાં)}$$

આમ, સીડીની લંબાઈ 10 મી. થશે.



37) સમબાજુ ત્રિકોણમાં દર્શાવો કે બાજુનો વર્ગ મધ્યગાના વર્ગના ચાર ગણા બરાબર છે.

જવાબ :

અહીં $\triangle ABC$ એ સમબાજુ ત્રિકોણ આપેલ છે.

$\therefore AB = BC = AC$ અને $AD \perp BC$

સાધ્ય : $3AB^2 = 4AD^2$

સાબિતી : સમબાજુ $\triangle ABC$ માં,

ધારો કે $AB = 2a$ અને $AB = BC = AC = 2a$

$\therefore AD \perp BC$

$\therefore BD = DC = \frac{1}{2} BC = a$

કાટકોણ $\triangle ADB$ માં,

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$\therefore (2a)^2 = AD^2 + (a)^2$$

$$\therefore 4a^2 = AD^2 + a^2$$

$$\therefore AD^2 = 3 \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

$$\therefore AD^2 = \frac{3}{4} AB^2$$

$$\therefore 4AD^2 = 3AB^2$$

આથી કહી શકાય કે, $3AB^2 = 4AD^2$