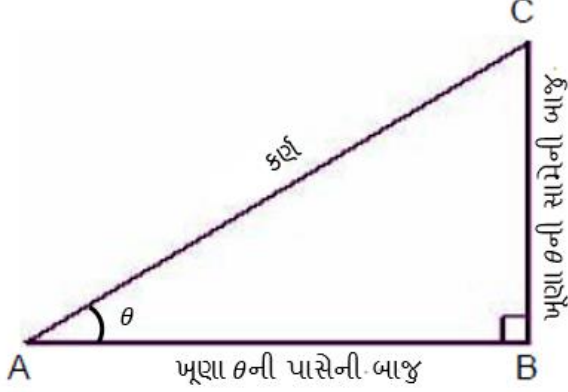


22. ત્રિકોણમિતિનો પરિચય

PRATHAM EDUCATION FOUNDATION



કાટકોણ ત્રિકોણમાંના લઘુકોણના ખૂણા θ માટે ત્રિકોણમિતીય ગુણોતર :



આકૃતિમાં ΔABC કાટકોણ ત્રિકોણ બતાવેલ છે, જેમાં ખૂણા θ ને સાપેક્ષ :

$$(1) \sin \theta = \frac{\text{ખૂણા } \theta \text{ ની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{BC}{AC}$$

$$(2) \cos \theta = \frac{\text{ખૂણા } \theta \text{ ની પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{AB}{AC}$$

$$(3) \tan \theta = \frac{\text{ખૂણા } \theta \text{ ની સામેની બાજુ}}{\text{ખૂણા } \theta \text{ ની પાસેની બાજુ}} = \frac{BC}{AB}$$

$$(4) \operatorname{cosec} \theta = \frac{\text{કર્ણ}}{\text{ખૂણા } \theta \text{ ની સામેની બાજુ}} = \frac{AC}{BC}$$

$$(5) \sec \theta = \frac{\text{કર્ણ}}{\text{ખૂણા } \theta \text{ ની પાસેની બાજુ}} = \frac{AC}{AB}$$

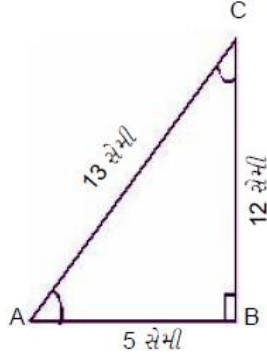
$$(6) \cot \theta = \frac{\text{ખૂણા } \theta \text{ ની પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{AB}{BC}$$

નોંધ : $\sin A$ અથવા $\sin \theta$ એ પ્રતિક / ચિન્હ છે અને $\sin A$ કે $\sin \theta$ ને જુદું પાડી શકાય નહીં, વળી તે $\sin \times \theta$ નથી. આ હકીકત દરેક ત્રિ- ગુણોતરોને લાગુ પડે છે.

દરેક ત્રિ- ગુણોતરએ એક વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

સવાલ 1)

નીચે આપેલી આકૃતિમાં ΔABC માં $\angle B$ કાટખૂણો છે. જો $AB = 5$ સેમી. $BC = 12$ સેમી. અને $AC = 13$ સેમી. હોય, તો $\tan C$, $\operatorname{cosec} C$ અને $\sec C$ નાં મૂલ્યો શોધો?



જવાબ :

અહીં,

$AB = 5$ સેમી. $BC = 12$ સેમી. અને $AC = 13$ તથા $\angle B$ કાટખૂણો આપેલ છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

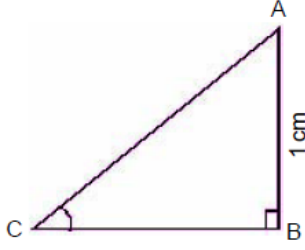
$$\begin{aligned}\tan C &= \frac{\angle C \text{ ની સામેની બાજુ}}{\angle C \text{ ની પાસેની બાજુ}} \\ &= \frac{AB}{BC} \\ &= \frac{5}{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cosec} C &= \frac{\text{કર્ણ}}{\angle C \text{ ની સામેની બાજુ}} \\ &= \frac{AC}{AB} \\ &= \frac{13}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sec C &= \frac{\text{કર્ણ}}{\angle C \text{ ની પાસેની બાજુ}} \\ &= \frac{AC}{BC} \\ &= \frac{13}{12}\end{aligned}$$

સવાલ 2)

નીચે આપેલી આકૃતિમાં ΔABC માં $\angle B$ કાટખૂણો છે. જો $\angle A = \angle C$, $AC = \sqrt{2}$ સેમી. અને $AB = 1$ સેમી. છે, તો $\sin C$, $\cos C$ અને $\tan C$ નાં મૂલ્યો શોધો?



જવાબ :

ΔABC માં $\angle B$ કાટખૂણો, $\angle A = \angle C$, $AC = \sqrt{2}$ સેમી. અને $AB = 1$ સેમી. આપેલ છે.

$\therefore BC = AC = 1$ સેમી. (સમાન ખુણાની સામેની બાજુઓ સમાન)

$$\begin{aligned}\therefore \sin C &= \frac{\angle C \text{ ની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} \\ &= \frac{AB}{AC} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

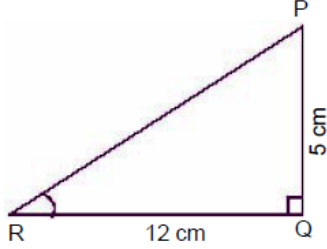
$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{\angle C \text{ ની પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} \\ &= \frac{BC}{AC} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan C &= \frac{\angle C \text{ ની સામેની બાજુ}}{\angle C \text{ ની પાસેની બાજુ}} \\ &= \frac{AB}{BC} \\ &= \frac{1}{1} \\ &= 1\end{aligned}$$

કાટકોણ ત્રિકોણની આપેલી બે બાજુઓ પર ત્રિ-ગુણોતરો શોધવા :

જ્યારે કાટકોણ ત્રિકોણની બે બાજુઓના માપ આપ્યા હોય, ત્યારે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને ત્રીજી બાજુ શોધી શકાય છે.

સવાલ 3) નીચે આપેલી આકૃતિમાં ΔPQR માં $\angle Q$ કાટખૂણો છે. જો $PQ = 5$ સેમી. અને $QR = 12$ સેમી. હોય, તો $\sin R$, $\cos R$ અને $\tan R$ નાં મૂલ્યો શોધો?



જવાબ : અહીં, ΔPQR માં $\angle Q$ કાટખૂણો, $PQ = 5$ સેમી. અને $QR = 12$ સેમી. આપેલ છે.

પાયથાગોરસ પ્રમેય ઉપયોગ કરીને આપણે ત્રીજી બાજુ શોધીશું.

કાટકોણ, ΔPQR માં,

$$PR^2 = QR^2 + PQ^2$$

$$\therefore PR^2 = (12)^2 + (5)^2$$

$$\therefore PR^2 = 144 + 25$$

$$\therefore PR^2 = 169$$

$$\therefore \sqrt{PR^2} = \sqrt{169} \quad (\text{બંને બાજુ વર્ગમૂળ લેતાં})$$

$$\therefore \sqrt{PR^2} = \sqrt{13 \times 13}$$

$$\therefore \sqrt{PR^2} = \sqrt{(13)^2}$$

$$\therefore PR = 13 \text{ સેમી.}$$

હવે, ત્રિ-ગુણોતરની વ્યાખ્યાને આધારે :

$$\therefore \sin R = \frac{\angle R \text{ ની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$$

$$\cos R = \frac{\angle R \text{ ની પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{QR}{PR} = \frac{12}{13}$$

$$\text{અને } \tan R = \frac{\angle R \text{ ની સામેની બાજુ}}{\angle R \text{ ની પાસેની બાજુ}} = \frac{PQ}{QR} = \frac{5}{12}$$

એક ત્રિ-ગુણોતર પરથી બીજા ત્રિ-ગુણોતર શોધવા :

ક્યારેક આપણે એક ત્રિ-ગુણોતર જાણતા હોઈએ અને આપણે બાકીના ત્રિ-ગુણોતરો જાણવા છે. તો આ ત્રિ-ગુણોતરની વ્યાખ્યા અને પાયથાગોરસના પ્રમેયને આધારે આ ગણતરી શક્ય બને છે.

સવાલ 4) $\cos \theta = \frac{7}{25}$, તો $\cos \theta$ અને $\tan \theta$ શોધો ?

જવાબ : ધારોકે ΔABC માં $\angle B = 90^\circ$ અને $\angle C = \theta$ છે અને $\cos \theta = \frac{7}{25}$

આપેલાં છે.

$$\therefore \cos \theta = \frac{\angle \theta \text{ ની પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{7}{25}$$

કાટકોણ, ΔABC માં,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\therefore (25)^2 = AB^2 + (7)^2$$

$$\therefore 625 = AB^2 + 49$$

$$\therefore AB^2 = 625 - 49$$

$$\therefore AB^2 = 576$$

$$\therefore \sqrt{AB^2} = \sqrt{169} \quad (\text{બંને બાજુ વર્ગમૂળ લેતાં})$$

$$\therefore \sqrt{AB^2} = \sqrt{24 \times 24}$$

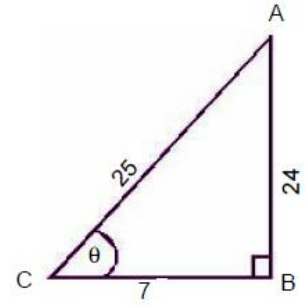
$$\therefore \sqrt{AB^2} = \sqrt{(24)^2}$$

$$\therefore AB = 24$$

હવે, ત્રિ-ગુણોતરની વ્યાખ્યાને આધારે :

$$\therefore \sin \theta = \frac{\angle \theta \text{ ની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$$

$$\text{અને } \tan \theta = \frac{\angle \theta \text{ ની સામેની બાજુ}}{\angle \theta \text{ ની પાસેની બાજુ}} = \frac{AB}{BC} = \frac{24}{7}$$



સવાલ 5)

જો $\cot \theta = \frac{40}{9}$ હોય, તો $\frac{\cos \theta \cdot \sin \theta}{\sin \theta}$ નું મુલ્ય શોધો ?

જવાબ :

ધારોકે ΔABC માં $\angle B = 90^\circ$ અને $\angle C = \theta$ છે અને $\cot \theta = \frac{40}{9}$ આપેલાં છે.

$$\therefore \cot \theta = \frac{\angle \theta \text{ ની પાસેની બાજુ}}{\angle \theta \text{ ની સામેની બાજુ}} = \frac{40}{9}$$

કાટકોણ, ΔABC માં,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\therefore AC^2 = (9)^2 + (40)^2$$

$$\therefore AC^2 = 81 + 1600$$

$$\therefore AC^2 = 1681$$

$$\therefore \sqrt{AC^2} = \sqrt{1681} \quad (\text{બંને બાજુ વર્ગમૂળ લેતાં})$$

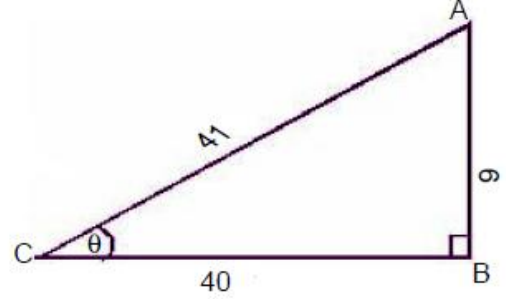
$$\therefore \sqrt{AC^2} = \sqrt{41 \times 41}$$

$$\therefore \sqrt{AC^2} = \sqrt{(41)^2}$$

$$\therefore AC = 41$$

હવે, ત્રિ-ગુણોતરની વ્યાખ્યાને આધારે :

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\cos \theta \cdot \sin \theta}{\sec \theta} &= \frac{\frac{BC}{AC} \times \frac{AB}{AC}}{\frac{AC}{BC}} \\ &= \frac{\frac{40}{41} \times \frac{9}{41}}{\frac{41}{40}} \\ &= \frac{40}{41} \times \frac{9}{41} \times \frac{40}{41} \\ &= \frac{144000}{68921} \end{aligned}$$



સવાલ 6) ΔPQR માં $\angle Q = 90^\circ$ અને $\tan R = \frac{1}{\sqrt{3}}$ હોય, તો સાબિત કરો કે,
 $\sin P \cdot \cos R + \cos P \cdot \sin R = 1$

જવાબ : ΔPQR માં $\angle Q = 90^\circ$ અને $\tan R = \frac{1}{\sqrt{3}}$ આપેલાં છે.

$$\therefore \tan R = \frac{\angle R \text{ ની સામેની બાજુ}}{\angle R \text{ ની પાસેની બાજુ}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

કાટકોણ, ΔPQR માં,

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$

$$\therefore PR^2 = (1)^2 + (\sqrt{3})^2$$

$$\therefore PR^2 = 1 + 3$$

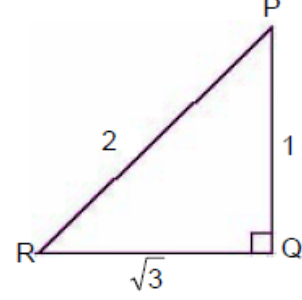
$$\therefore PR^2 = 4$$

$$\therefore \sqrt{PR^2} = \sqrt{4} \text{ (બંને બાજુ વર્ગમૂળ લેતાં)}$$

$$\therefore \sqrt{PR^2} = \sqrt{2 \times 2}$$

$$\therefore \sqrt{PR^2} = \sqrt{(2)^2}$$

$$\therefore PR = 2$$



હવે, ત્રિ-ગુણોત્તરની વ્યાખ્યાને આધારે :

$$\sin P \cdot \cos R + \cos P \cdot \sin R = 1$$

$$\text{Sl.બા.} = \text{જ.બા.}$$

$$\text{Sl.બા.} = \sin P \cdot \cos R + \cos P \cdot \sin R$$

$$= \frac{QR}{PR} \times \frac{QR}{PR} + \frac{PQ}{PR} \times \frac{PQ}{PR}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2 \times 2} + \frac{1 \times 1}{2 \times 2}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3 + 1}{4}$$

$$= \frac{4}{4}$$

$$= 1$$

આમ, $\sin P \cdot \cos R + \cos P \cdot \sin R = 1$ સાબિત થાય છે.

ત્રિ - ગુણોતરો વચ્ચેનો સંબંધ :

$$(1) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$(2) \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$(3) \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{અથવા} \quad \sec \theta \times \cos \theta = 1$$

$$(4) \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{અથવા} \quad \operatorname{cosec} \theta \times \sin \theta = 1$$

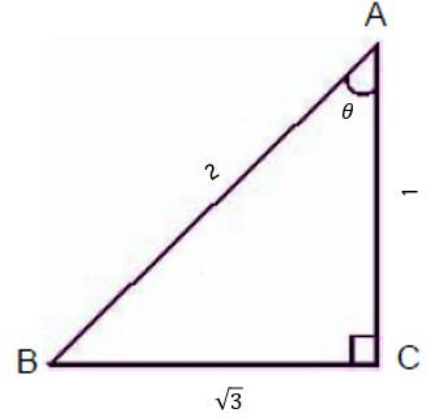
સવાલ 7) જો $\cos \theta = \frac{1}{2}$ અને $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ હોય, તો $\operatorname{cosec} \theta$, અને $\sec \theta$ અને $\tan \theta$ નાં મૂલ્ય શોધો?

જવાબ : અહીં, $\cos \theta = \frac{1}{2}$ અને $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ આપેલ છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec} \theta &= \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \frac{1}{\frac{BC}{AB}} \\ &= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{1}{1} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sec \theta &= \frac{1}{\cos \theta} \\ &= \frac{1}{\frac{AC}{AB}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{1} \times \frac{2}{1} \\ &= 2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\
&= \frac{\frac{BC}{AB}}{\frac{AC}{AB}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\frac{2}{1}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1} \\
&= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

સવાલ 8) ΔABC માં $\angle C = 90^\circ$ અને $\tan A = 1$ હોય, તો $\cos B$ ની કિંમત શોધો ?

જવાબ : અહીં,

ΔABC માં $\angle C = 90^\circ$ અને $\tan A = 1$ આપેલ છે.

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = 1$$

$$BC = AC$$

પાયથાગોરસ પ્રમેય મુજબ,

કાટકોણ ΔABC માં,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$\therefore AB^2 = (1)^2 + (1)^2$$

$$\therefore AB^2 = 1 + 1$$

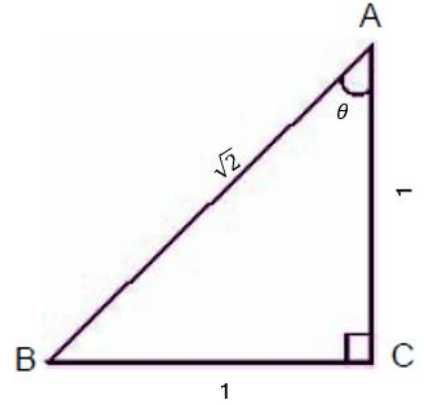
$$\therefore AB^2 = 2$$

$$\therefore \sqrt{AB^2} = \sqrt{2} \text{ (બંને બાજુ વર્ગમૂળ લેતાં)}$$

$$\therefore AB = \sqrt{2}$$

હવે, ત્રિ-ગુણોતરની વ્યાખ્યાને આધારે :

$$\begin{aligned}
\cos B &= \frac{BC}{AB} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$



ત્રિકોમિતીય ગુણોતર વિષે નિત્યસમ :

$$(1) \tan \theta \cdot \cot \theta = \cot \theta \cdot \tan \theta = 1$$

$$(2) \sec \theta \cdot \cos \theta = \cos \theta \cdot \sec \theta = 1$$

$$(3) \operatorname{cosec} \theta \cdot \sin \theta = \sin \theta \cdot \operatorname{cosec} \theta = 1$$

$$(4) \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \quad \text{અથવા} \quad \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \quad \text{અથવા} \quad \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$(5) \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta \quad \text{અથવા} \quad \tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1 \quad \text{અથવા} \quad \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$(6) \operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta \quad \text{અથવા} \quad \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta - 1 \quad \text{અથવા} \quad \operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

સવાલ 9) સાબિત કરો કે, $\tan \theta + \cot \theta = \frac{1}{\sin \theta \cdot \cos \theta}$

જવાબ : Sl.બલ. = જ.બલ.

$$\text{Sl.બલ.} = \tan \theta + \cot \theta$$

$$= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cdot \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{\sin \theta \cdot \cos \theta}$$

$$(\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1)$$

સવાલ 10) સાબિત કરો કે, $\frac{\sin A}{1 + \cos A} + \frac{1 + \cos A}{\sin A} = 2 \operatorname{cosec} A$

જવાબ : ડા.બા = જ.બા

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin A}{1 + \cos A} + \frac{1 + \cos A}{\sin A} \\ &= \frac{\sin^2 A + (1 + \cos A)^2}{\sin A (1 + \cos A)} \\ &= \frac{\sin^2 A + 1 + \cos^2 A + 2 \cos A}{\sin A (1 + \cos A)} \\ &= \frac{(\sin^2 A + \cos^2 A) + 1 + 2 \cos A}{\sin A (1 + \cos A)} \\ &= \frac{1 + 1 + 2 \cos A}{\sin A (1 + \cos A)} \\ &= \frac{2 + 2 \cos A}{\sin A (1 + \cos A)} \\ &= \frac{2(1 + \cos A)}{\sin A (1 + \cos A)} \\ &= \frac{2}{\sin A} \\ &= 2 \operatorname{cosec} A \\ &= \text{જ.બા} \end{aligned}$$

બાબ, $\frac{\sin A}{1 + \cos A} + \frac{1 + \cos A}{\sin A} = 2 \operatorname{cosec} A$

સવાલ 11) સાબિત કરો કે, $\frac{1 - \sin A}{1 + \sin A} + (\sec A - \tan A)^2$

જવાબ : ડા.બા = જ.બા

$$\begin{aligned} &= (\sec A - \tan A)^2 \\ &= \left(\frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A} \right)^2 \\ &= \left(\frac{1 - \sin A}{\cos A} \right)^2 \\ &= \frac{(1 - \sin A)^2}{\cos^2 A} \\ &= \frac{(1 - \sin A)^2}{1 - \sin^2 A} \quad (\because \cos^2 A = 1 - \sin^2 A) \\ &= \frac{(1 - \sin A)^2}{(1 - \sin A)(1 + \sin A)} \\ &= \frac{1 - \sin A}{1 + \sin A} \\ &= ડા.બા \end{aligned}$$

બા, $\frac{1 - \sin A}{1 + \sin A} + (\sec A - \tan A)^2$

સવાલ 12) સાબિત કરો કે, $\sec A (1 - \sin A)(\sec A + \tan A) = 1$

જવાબ : ડા.બા = જ.બા

$$\begin{aligned} &= \sec A (1 - \sin A) (\sec A + \tan A) \\ &= \frac{1}{\cos A} (1 - \sin A) \left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A} \right) \\ &= \frac{(1 - \sin A)(1 + \sin A)}{\cos^2 A} \\ &= \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A} \\ &= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} \\ &= 1 \text{ જ.બા.} \end{aligned}$$

અામ, $\frac{1 - \sin A}{1 + \sin A} + (\sec A - \tan A)^2$

કોટિકોણ વિષે ત્રિકોણમિતીય ગુણોતરો :

- (1) પ્રત્યેક $\theta \in R, 0 \leq \theta \leq 90$ માટે, $\sin(90 - \theta) = \cos \theta$ અને $\cos(90 - \theta) = \sin \theta$
(2) પ્રત્યેક $\theta \in R, 0 \leq \theta \leq 90$ માટે, $\cot(90 - \theta) = \tan \theta$ અને $\operatorname{cosec}(90 - \theta) = \sec \theta$
(3) પ્રત્યેક $\theta \in R, 0 \leq \theta \leq 90$ માટે, $\tan(90 - \theta) = \cot \theta$ અને $\sec(90 - \theta) = \operatorname{cosec} \theta$

નોંધ : પ્રત્યેકમાં $\theta \in R, 0 \leq \theta \leq 90$ કેમ ન લીધું ?

કારણ કે, $\tan 90$ અને $\sec 90$ અવ્યાખ્યાયિત છે. $\therefore \theta = 90$ ન લેવાય.

તથા $\cot 0$ અને $\operatorname{cosec} 0$ અવ્યાખ્યાયિત છે. $\therefore \theta = 0$ ન લેવાય.

સવાલ 13) સાબિત કરો કે $\tan 13^\circ = \cot 77^\circ$

જવાબ : Sl.બા. = જ.બા.

$$\text{જ.બા.} = \cot 77^\circ$$

$$= \cot(90^\circ - 13^\circ)$$

$$= \tan 77^\circ \quad (\because \cot(90^\circ - \theta) = \tan \theta)$$

$$= \text{Sl.બા.}$$

આમ, સાબિત થાય છે કે $\tan 13^\circ = \cot 77^\circ$

સવાલ 14) $\sin^2 40^\circ - \cos^2 50^\circ$ ની કિંમત શોધો ?

જવાબ : $\cos^2 50^\circ = \cos^2(90^\circ - 40^\circ)$

$$= \sin^2 40^\circ \quad (\because \cos^2(90^\circ - \theta) = \sin^2 \theta)$$

$$\therefore \sin^2 40^\circ - \cos^2 50^\circ = \sin^2 40^\circ - \sin^2 40^\circ$$

$$= 0$$

સવાલ 15) સાબિત કરો કે, $3 \sin 170^\circ \sec 73^\circ + 2 \tan 20^\circ \tan 70^\circ = 5$

જવાબ : $3 \sin 170^\circ \sec 73^\circ + 2 \tan 20^\circ \tan 70^\circ$

$$= 3 \sin 17^\circ \sec(90^\circ - 73^\circ) + 2 \tan 20^\circ \tan(90^\circ - 70^\circ)$$

$$= 3 \sin 17^\circ \operatorname{cosec} 17^\circ + 2 \tan 20^\circ \cot 20^\circ$$

$$= 3(1) + 2(1)$$

$$= 3 + 2$$

$$= 5$$

સવાલ 16) સાબિત કરો કે, $\tan 7^\circ \tan 23^\circ \tan 67^\circ \tan 83^\circ = 1$

જવાબ : $\tan 67^\circ = \tan(90^\circ - 23^\circ) = \cot 23^\circ$ અને $\tan 83^\circ = \tan(90^\circ - 7^\circ) = \cot 7^\circ$

$$\begin{aligned} \text{S.L.} &= \tan 7^\circ \tan 23^\circ \tan 67^\circ \tan 83^\circ \\ &= \tan 7^\circ \tan 23^\circ \cot 23^\circ \cot 7^\circ \\ &= (\tan 7^\circ \cot 7^\circ) (\tan 23^\circ \cot 23^\circ) \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

સવાલ 17) જો $\tan A = \cot B$ હોય, તો $A + B = 90^\circ$

જવાબ : અહીં, $\tan A = \cot B$ આપેલું છે.

$$\therefore \tan A = \tan(90^\circ - B)$$

$$\therefore A = 90^\circ - B$$

$$\therefore A + B = 90^\circ$$

સવાલ 18) ΔABC ના અંદરના ખૂણા A, B અને C માટે સાબિત કરો કે $\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\left(\frac{A}{2}\right)$

જવાબ : આપણે જાણીએ છીએ કે ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણાઓના માપનો સરવાળો 180° થાય છે.

$$\therefore A + B + C = 180^\circ$$

$$\therefore B + C = 180^\circ - A$$

$$\therefore \frac{B+C}{2} = \frac{180}{2} - \frac{A}{2} \quad (\text{બંને બાજુ 2 વડે ભાગાકાર કરતાં})$$

$$\therefore \frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$$

$$\therefore \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)$$

$$\therefore \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\left(\frac{A}{2}\right)$$

સવાલ 19) સાબિત કરો કે, $\frac{\cos \theta}{\sin(90^\circ - \theta)} + \frac{\sin \theta}{\cos(90^\circ - \theta)} = 2$

જવાબ :

$$\begin{aligned} \text{સા.બા.} &= \frac{\cos \theta}{\sin(90^\circ - \theta)} + \frac{\sin \theta}{\cos(90^\circ - \theta)} \\ &= \frac{\cos \theta}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\sin \theta} \quad (\because \sin(90 - \theta) = \cos \theta \text{ અને } \cos(90 - \theta) = \sin \theta) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

સવાલ 20) જો $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$ જ્યાં $2A$ લઘુકોણ છે તો A ની કિંમત શોધો?

જવાબ :

$$\begin{aligned} \tan 2A &= \cot(A - 18^\circ) \\ \therefore \cot(90^\circ - 2A) &= \cot(A - 18^\circ) && (\because \cot(90 - 2A) = \tan 2A) \\ \therefore 90^\circ - 2A &= A - 18^\circ \\ \therefore 2A + A &= 90^\circ + 18^\circ \\ \therefore 3A &= 108^\circ \\ \therefore A &= \frac{108}{3} \\ \therefore A &= 36^\circ \end{aligned}$$