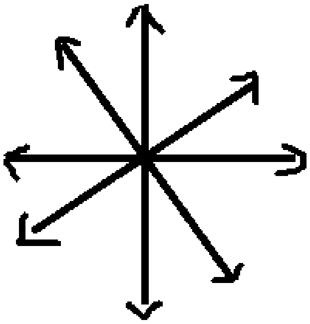
12. સંગામી રેખાઓ

PRATHAM EDUCATION FOUNDATION

Pratham

સમજ :

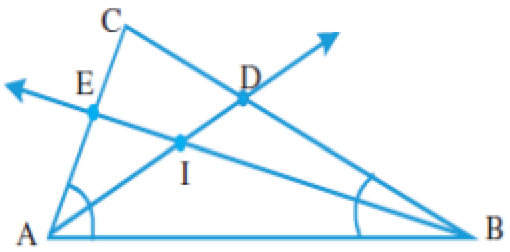
કોઈ એક સમતલમાં ત્રણ કે વધુ રેખાઓ જે એકબીજાને બરાબર એક બિંદુમાં છેદે છે અથવા એક જ બિંદુ માંથી પસાર થાય છે તેમને સંગામી રેખાઓ કહે છે અને તેના સામાન્ય બિંદુને સંગમ બિંદુ કહેવાય છે.

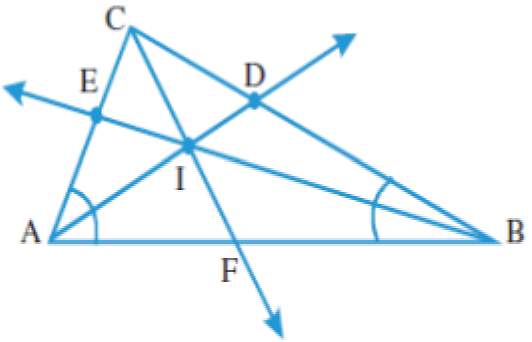


કોણદ્વીભાજક :

અંત:કેન્દ્ર :

ત્રિકોણના કોણ દ્વીભાજકો એક બિંદુ માંથી પસાર થાય છે. અર્થાત તેઓ સંગામી છે. જે સંગમ બિંદુ "I" ત્રિકોણનું "અંત:કેન્દ્ર" કહેવાય છે.

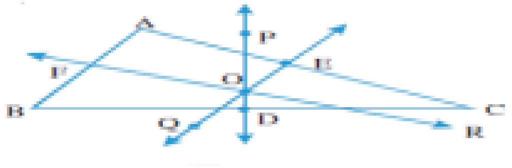


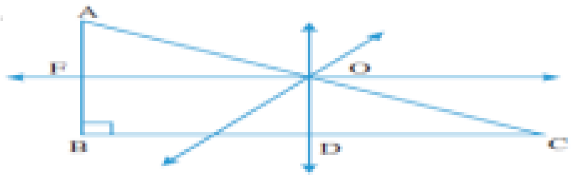


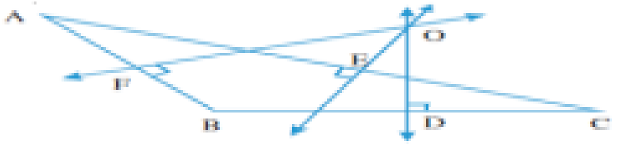
લંબદ્વીભાજક :

પરિકેન્દ્ર :

ત્રિકોણની બાજુઓના લંબદ્વીભાજકો એક જ બિંદુ માંથી પસાર થાય છે, અર્થાત તે સંગામી છે. સંગમ બિંદુ "O" ત્રિકોણનું પરિ કેન્દ્ર કહેવાય છે.



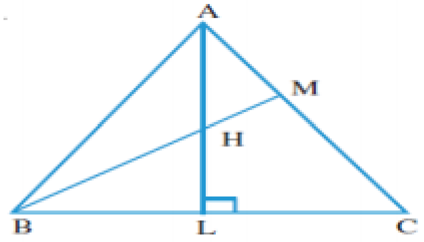


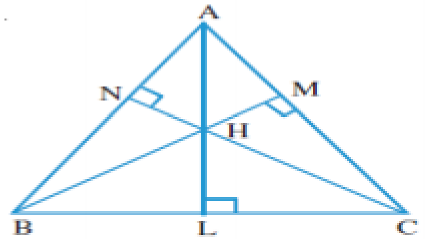


ત્રિકોણના વેધ :

લંબકેન્દ્ર :

આપણે કોઈ પણ પ્રકારનો ત્રિકોણ દોરીએ અને તેના ત્રણે વેધ દોરીએ તે દરેક સંગામી હોય છે. આમ ત્રિકોણના ત્રણે વેદ એજ બિંદુ માંથી પસાર થાય છે, અર્થાત તે સંગામી છે તેના સંગમબિંદુ ને ત્રિકોણનું " લંબકેન્દ્ર" કહે છે.

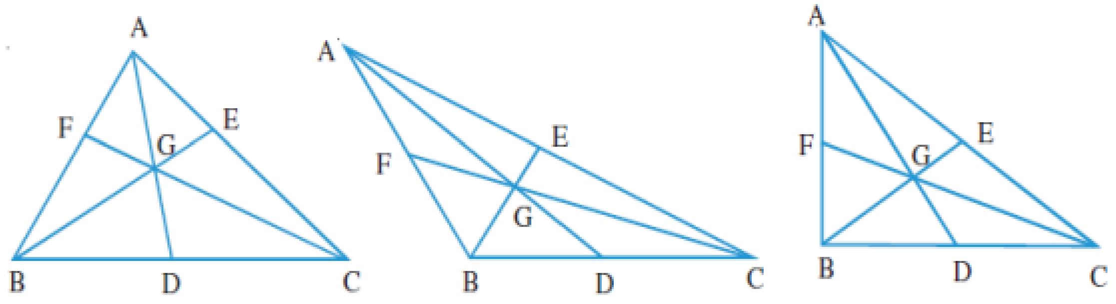




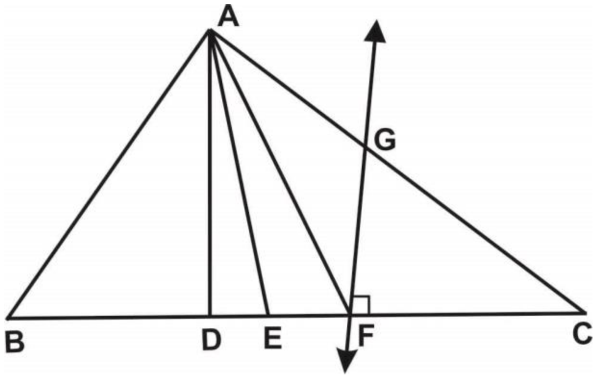
મધ્યગા :

મધ્યકેન્દ્ર :

ત્રિકોણની મધ્યગાઓ એકજ બિંદુ માંથી પસાર થાય છે,જે દરેક મધ્યગાને 2:1 ના પ્રમાણમાં વિભાગે છે.તેના સંગમ બિંદુ G ને " મધ્ય કેન્દ્ર " કહે છે.



(1) જો BE =FC, ∠BAE = ∠CAE અનેu ∠ADE = ∠GFC = 90° તો ત્રિકોણની મધ્યગા, કોણ દ્વીભાજકો, વેધ અને લંબ દ્વીભાજકનાં નામ જણાવો.



ઉકેલ :

ઉપર આપેલી આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે,

AF = મધ્યગા

AE = કોણ દ્વીભાજક

AD = વેધ

GF = લંબ દ્વીભાજક

(2) સમબાજુ ત્રિકોણમાં દર્શાવો કે અંતઃકેન્દ્ર, પરિકેન્દ્ર, લંબકેન્દ્ર અને મધ્યકેન્દ્ર એક જ બિંદુ છે.

જવાબ :

આકૃતિ બનાવી રચના કરીએ.

⇒ પ્રથમ સમબાજુ ત્રિકોણ ABC બનાવો.

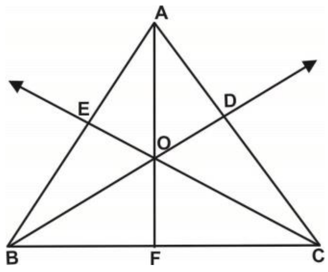
⇒ આપણે સાબિત કરવાનું છે કે અંતઃકેન્દ્ર, પરિકેન્દ્ર,લંબકેન્દ્ર અને મધ્યકેન્દ્ર એક જ બિંદુ છે જેને આપણે O નામ આપીએ.

⇒ અંતઃકેન્દ્ર કોણ દ્વીભાજકનું સંગમ બિંદુ છે.

⇒ પરિકેન્દ્ર બાજુઓનું લંબદ્વીભાજકનું સંગમ બિંદુ છે.

⇒ ત્રિકોણના વેધનું સંગમબિંદુ ત્રિકોણનું લંબકેન્દ્ર છે.

⇒ ત્રિકોણની મધ્યગાનું સંગમબિંદુ ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર છે.



∴ ધારોકે O, ΔABC નું અંત:કેન્દ્ર છે, એટલે

∴ OD = OF

ધારોકે O, ΔABC મધ્યકેન્દ્ર છે.

∴ BF = CF

તેથી OF, BC નું મધ્યબિંદુ થશે

તો AF, BC નો લંબ દ્વીભાજક હશે તેવી જ રીતે

BD બાજુ AC તથા CE બાજુw AB નો લંબ દ્વીભાજક હશે.

તેથી O ΔABC નું લંબકેન્દ્ર થશે

હવે ΔOBE અને ΔOCD માં

BE = CD

OE = OD

$\angle BOE = \angle COD$

$\therefore \Delta BOE \cong \Delta COD$

$\therefore$ OB = OC

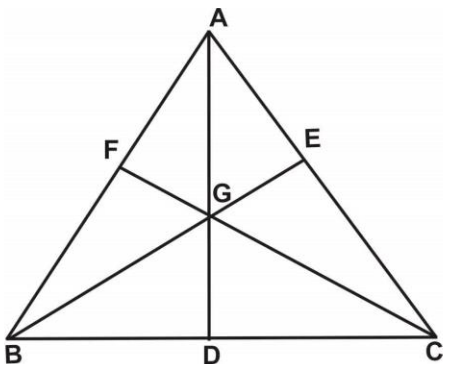
આવીજ રીતે OA = OB = OC થાય.

તેથી O ત્રિકોણનું પરિકેન્દ્ર છે.

GF = લંબ દ્વીભાજક

(3) સમબાજુ ત્રીકોણ ABC માં G ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર છે, જો AG 4.8 સેમી. હોય, તો BE શોધો.

જવાબ :



ΔABC સમબાજુ ત્રિકોણ છે. (આપેલ છે)

$\therefore$ AD = BE = CE ....(1)

G ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર છે, આપણે જાણીએ છીએ કે મધ્યગાને મધ્યકેન્દ્ર 2:1 ના પ્રમાણમાં વિભાગે છે.

$\therefore AG = \frac{2}{3} AD$

$\therefore AD = \frac{3}{2} AG$

$\therefore AD = \frac{3}{2} \times 4.8$

$\therefore$ AD = 7.2 cm.

પરિણામ (1) પરથી,

AD = BE

$\therefore$ BE = 7.2

આમ, AD = BE = 7.2 cm.

(4) જો H એ ΔABC નું લંબકેન્દ્ર હોય તો દર્શાવો કે A, ΔHBC નું લંબ કેન્દ્ર હોય.

જવાબ :

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ H, ΔHBC નું લંબ કેન્દ્ર છે.

$\therefore$ $AD \perp BC$

$BE \perp AC$

$CF \perp AB$

હવે, ΔHBC માં,

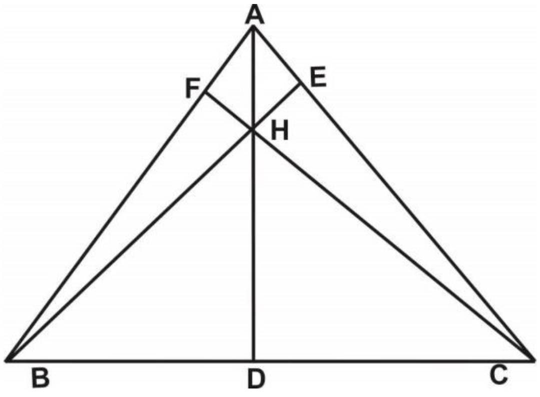
$\therefore$ $HD \perp BC$

$EC \perp HB$

$BF \perp HC$ થાય.

આ ત્રણેય લંબનું સંગમ બિંદુ A છે.

તેથી ΔHBC નું લંબકેન્દ્ર A છે.



(5) નીચે આપેલાં પ્રશ્નો પૈકી સાચો જવાબ પસંદ કરો :

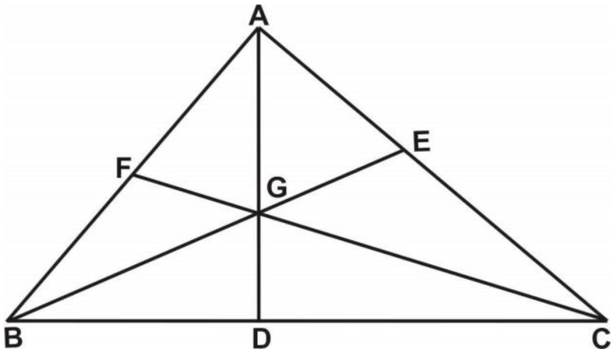
I. સમતલમાં ત્રિકોણના શિરોબિંદુ માંથી સમાન અંતરે રહેલ બિંદુ નીચે પ્રમાણે કહેવાય :
(A) મધ્યકેન્દ્ર
(B) અંતઃકેન્દ્ર
(C) પરિકેન્દ્ર
(D) લંબકેન્દ્ર
જવાબ : (C) પરિકેન્દ્ર

II. ત્રિકોણના સમતલમાં ત્રિકોણની બાજુઓથી સમાન અંતરે રહેલ બિંદુ નીચે પ્રમાણે કહેવાય :
(A) મધ્યકેન્દ્ર
(B) અંતઃકેન્દ્ર
(C) પરિકેન્દ્ર
(D) લંબકેન્દ્ર
જવાબ : (B) અંતઃકેન્દ્ર

સત્રાંત સ્વધાય

(6) આપેલી આકૃતિમાં D E અને F ΔABC ની બાજુઓના મધ્યબિંદઓ છે, દર્શાવો કે $BE + CF > \frac{3}{2}$ BC

જવાબ :



ΔBEC માં,

BE + EC > BC ....(1)

ΔCFB માં,

CF + FB > BC ....(2)

ΔABC માં,

AB + AC > BC ....(3)

પરિણામ (1) અને (2) સરવાળો કરતાં,

BE + EC + CF + FB > BC + BC

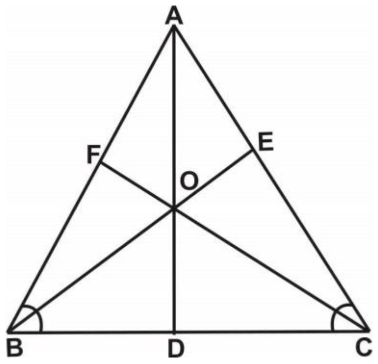
$\therefore$ BE + AC + CF + AB > 2 BC CEC = $\frac{1}{2}$ AC FB = $\frac{1}{2}$

$\therefore$ BE + CF > 2BC $-$ $\frac{1}{2}$ (AB ÷ AC)

$\therefore$ BE + CF > 2BC $-$ $\frac{1}{2}$ BC

$\therefore$ BE + CF > $\frac{3}{2}$ BC

(7) ABC એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે. જેમાં AB = AC અને D એ BCનું મધ્યબિંદુ છે. દર્શાવો કે, મધ્યકેન્દ્ર, અંતઃકેન્દ્ર, પરિકેન્દ્ર અને લંબકેન્દ્ર એ તમામ AD પર છે.



જવાબ :

ΔABC માં,

AB = AC (આપેલ છે)

∴ ∠A નો કોણ દ્વીભાજક AD એક વેધ, મધ્યગા અને લંબ દુભાજક છે.

AB = BC અને BC = AC

∴ ∠B અને ∠C નો કોણદ્વીભાજક ક્રમશ: BE અને CF

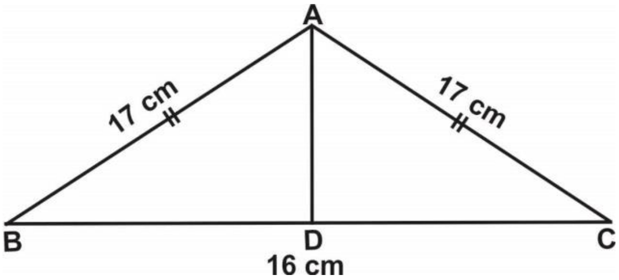
ΔABC ના વેધ, મધ્યગા અને લંબદુભાજક છે.

સમબાજુ ΔABCમાં, AD, BE અને CF નું સંગામી બિંદુ 'O' ક્રમશ: ત્રિકોણનું અંતઃકેન્દ્ર, પરિકેન્દ્ર અને લંબકેન્દ્ર કહેવાય છે.

મતલબ કે ΔABCનું અંતઃકેન્દ્ર, પરિકેન્દ્ર અને લંબકેન્દ્ર તથા મધ્ય કેન્દ્ર એકજ બિંદુ થશે.

(8) એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ ABC જેમાં, AB = AC = 17 cm અને પાયો BC =16 છે. જો G, ΔABC નું મધ્યકેન્દ્ર હોય, તો AG શોધો.

જવાબ :



ΔABC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

$\therefore$ AD ત્રિકોણ ABC ની મધ્યગા છે અને

AD બાજુ BC નો લંબદુભાજક છે.

$\therefore$ કાટકોણ ત્રિકોણ ABDમાં,

$AD^2 = AB^2 - BD^2$

$= (17)^2 - (8)^2$

$= 289 - 64$

BC = 16cm અને BD = $\frac{1}{2}$BC

$\therefore$ BD = $\frac{1}{2} \times 16$

$\therefore$ 180 = 8 સેમી.

G, ΔABC નું મધ્યકેન્દ્ર છે. આપણે જાણીએ છીએ કે મધ્યકેન્દ્ર મધ્યગાને 2:1 ના પ્રમાણમાં વિભાગે છે.

$\therefore$ AG = $\frac{2}{3}$ AD

$\therefore$ = $\frac{2}{3} \times 15$

$\therefore$ AG = 10 cm

(9) ABC એ 12 સમી વાળો સમબાજુ ત્રિકોણ છે. જો G, મધ્યકેન્દ્ર હોય તો AG શોધો.

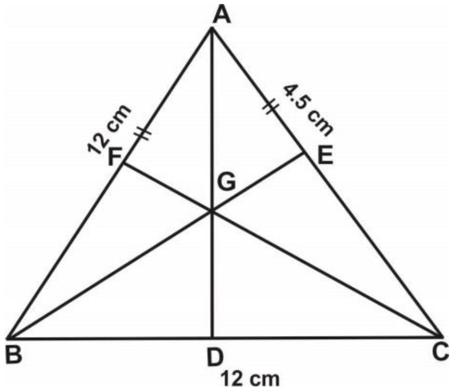
જવાબ

આપણે જાણીએ છીએ કે સમબાજુ ત્રિકોણમાં મધ્યગાઓ સમાન હોય છે.

ΔABC સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

$\therefore$ AD = BE = CF થાય.

AD, BCની મધ્યગા છે અને બાજુ BC નો લંબ દુભાજક પણ છે.



$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$

$\therefore (12)^2 = \therefore AD^2 + \therefore (6)^2$

$\therefore 144 - 36 = AD^2$

$\therefore 108 = AD^2$

$\therefore AD = \sqrt{36 \times 3}$

$\therefore AD = 6\sqrt{3}$

આપણે જાણીએ છીએ કે,

BD $= \frac{1}{2}$ BC

$\therefore$ BD $= \frac{1}{2} \times 12$

$\therefore$ BD = 6 સેમી.

આપણે જાણીએ છીએ કે ત્રિકોણની મધ્યગા મધ્યકેન્દ્રને 2:1 ના પ્રમાણમાં વિભાગે છે.

$\therefore AG = \frac{2}{3}\ AD$

$\therefore AG = \frac{2}{3}\ 6\sqrt{3}$

$\therefore AG = 4\sqrt{3}$

અથવા

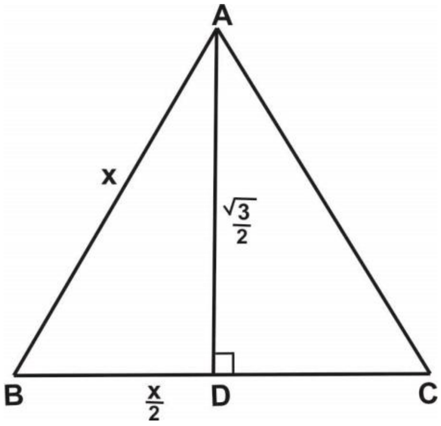
ΔABCસમબાજુ ત્રિકોણ છે.

$\therefore AD = BE = CF = \sqrt{\frac{3}{2}} \times$ બાજુ

$\therefore \sqrt{\frac{3}{2}} \times 12 = 6\sqrt{3}$ સેમી.

G ΔABC મધ્યકેન્દ્ર છે.

$\therefore AG = \frac{2}{3} AD$

$\therefore AG = \frac{2}{3} \times 6\sqrt{3}$

$\therefore AG = 4\sqrt{3}$ સેમી.